

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXVI - ANNO CXLVIII

(2009)



LIGUORI EDITORE







SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXVI - ANNO CXLVIII

*(2009)*

LIGUORI EDITORE

La pubblicazione è stata resa possibile dai contributi

- della Regione Campania
- della Fondazione Banco di Napoli
- del Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università di Napoli "Federico II"
- del Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca
- del Ministero per i Beni Culturali

**N. 76 - Dicembre 2009**

ISSN 0370-3568

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'Editore. Il regolamento per l'uso dei contenuti e dei servizi forniti dalla Casa Editrice Liguori disponibile al seguente indirizzo internet:

[http://www.liguori.it/politiche\\_contatti/default.asp?c=legal](http://www.liguori.it/politiche_contatti/default.asp?c=legal)

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascuna pubblicazione. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% per pubblicazione, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, [e-mail segreteria@aidro.org](mailto:e-mail_segreteria@aidro.org)

Direttore responsabile: Carlo Sbordone

© 2009 by Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Tutti i diritti sono riservati

Prima edizione italiana Dicembre 2009

Finito di stampare in Italia nel mese di Dicembre 2009 da OGL - Napoli

Autorizzazione del Tribunale di Napoli n. 780 del 14/08/1954

**ISBN-13 978 - 88 - 207 - 4973 - 6**

La carta utilizzata per la stampa di questo volume è inalterabile, priva di acidi, a pH neutro, conforme alle norme UNI EN Iso 9706  $\infty$ , realizzata con materie prime fibrose vergini provenienti da piantagioni rinnovabili e prodotti ausiliari assolutamente naturali, non inquinanti e totalmente biodegradabili.

## INDICE

R. Sersale – <i>Scarti industriali e sottoprodotti idonei alla produzione di clinker di cemento Portland.</i>	pag. 1
A. Buonocore, A. Di Crescenzo, L.M. Ricciardi – <i>On First Crossing Time Densities of Normal Processes with Oscillatory Covariances.</i>	» 9
J.N. Flavin, S. Rionero – <i>Asymptotic and other properties of a territorial bio-energy model.</i>	» 95
R. Schiattarella – <i>Sobolev ACL-homeomorphisms are bisobolev on planar domains.</i>	» 121
R. Sersale – <i>Ricerca ed innovazione nel settore dei materiali cementanti.</i>	» 127
G. D'Alessio – <i>L'evoluzione delle lingue e l'evoluzione biologica. L'evoluzione/involuzione dell'Italiano bio-chimico. Con un Glossario di Engl-iano.</i>	» 135
R. Sersale – <i>Nuovi additivi chimici e loro ruolo nel calcestruzzo.</i>	» 149
R. Sersale – <i>Prodotti di corrosione responsabili del degrado del calcestruzzo in ambiente marino.</i>	» 157
R. Sersale – <i>Carbonatazione dei calcestruzzi.</i>	» 163
N. Palladino – <i>Gli Anaglifi di Vuibert. Origine storica e applicazioni in didattica basata sui modelli di superfici matematiche.</i>	» 169
S. Rionero, M. Vitiello – <i>On the dynamic of the nonlinear reaction diffusion equation <math>u_t = \Delta F(u) + f(x, u, \nabla u)</math> under Robin boundary data.</i>	» 195
G. Di Meglio – <i>A family of sharp isoperimetric inequalities for bodies of revolution.</i>	» 209
R. Sersale – <i>I cloruri nel calcestruzzo.</i>	» 227
R. Sersale – <i>Parametri che influenzano l'"attività pozzolanica" delle aggiunte che parzialmente rimpiazzano il clinker di Portland.</i>	» 235
A. Mazzarella, R. Di Cristo, R. Viola – <i>L'Osservatorio Meteorologico di S. Marcellino – Napoli Centro: i dati dell'anno 2009.</i>	» 243

.....

**Scarti industriali e sottoprodotti idonei alla produzione di clinker di cemento Portland.**  
**Industrial wastes and by-products suitable for Portland cement clinker manufacturing.**

Nota del Socio ord. Riccardo SERSALE  
(Adunanza del dì 9 gennaio 2009)

**Riassunto.** Vengono dettagliatamente analizzate le possibilità di utilizzazione di scarti industriali o di sottoprodotti, come materie prime sostitutive, come correttivi, o come aggiunte semplicemente funzionali, per la preparazione della farina cruda di alimentazione dei forni a cemento. Caso per caso si specificano: natura ed ammontare delle materie aggiunte alla farina cruda, tipo di prodotto che vanno a sostituire o ad integrare, effetti sul prodotto finito. Si indicano i parametri che ne decidono l'utilizzazione, fra i quali, in primis, la compatibilità chimica dello scarto o sottoprodotto con le materie prime di alimentazione del forno.

*Parole chiave:* Clinker di Portland. Materie prime alternative.

**Summary.** The possible utilisation of industrial wastes or by-products as substitutive, corrective, or just functional raw-materials in Portland cement clinker manufacturing, has been in detail analysed. Nature and amount of the chemicals added to kiln feed, type of product replaced or supplemented, effects on performance of the end product, are fully discussed. Factors deciding for utilisation of these materials are emphasized and check of chemical compatibility of wastes with the kiln feed, stressed.

*Key words:* Portland cement clinker. Alternative raw-materials.

**Premessa.**

La crescente industrializzazione ha prodotto ed in abbondanza produce scarti industriali e sottoprodotti che, grazie alla compatibilità chimica con le materie prime impiegate nella preparazione delle miscele generatrici di clinker di cemento Portland, possono trovare facile ed economico impiego nell'industria cementiera.

Com'è noto, tale industria utilizza un gran numero di prodotti naturali, quali: calcare, argilla, scisti argillosi, minerali ferrosi, gesso. Per effetto della crescente disponibilità e della compatibilità composizionale con le miscele generatrici di clinker, parecchi scarti e sottoprodotti stanno trovando sempre più frequente utilizzazione nella preparazione della farina cruda di alimentazione dei forni a cemento, dando nello stesso tempo particolare impulso agli studi rivolti a valutare i vantaggi economici, di tutela dell'ambiente, di incremento dell'efficienza energetica e di semplicità operativa, conseguenti al loro impiego. E' naturalmente imperativo l'accertamento puntuale della compatibilità di composizione di ciascun prodotto con quella della farina cruda, tenendo però presente che la misura di sostituzione od integrazione di scarti o sottoprodotti non può talvolta esser troppo alta, per non influenzare negativamente le proprietà fisico-meccaniche del risultante clinker.

**Classificazione degli scarti e dei sottoprodotti.**

Vien fatta in base ai componenti che si prestano a sostituire, anche se uno stesso prodotto può rimpiazzarne più di uno solo.

Sono suddivisi in quattro classi: prodotti che rimpiazzano componenti calcarei; prodotti che rimpiazzano componenti silicei; prodotti che rimpiazzano componenti argillosi; prodotti a semplice comportamento funzionale.

Nella prima classe ricadono prodotti che rimpiazzano componenti calcarei: calcari di ridotta qualità; polveri di depurazione dei fumi in uscita dai forni rotativi; fanghiglie di carbonati o di carburi; scorie d'alto forno; scorie di acciaieria; scorie fosforose.

La seconda classe annovera: prodotti che rimpiazzano componenti silicei: sabbie di fonderia, sabbie da lavature; ceneri di pula di riso; residui dell'estrazione di metalli e scarti minerali.

La terza classe comprende prodotti che rimpiazzano componenti argillosi: fini di catalizzatore, ceneri volanti ad alto contenuto di carbonio, ceneri di fondo, scarti da processi di trasformazione del carbone (anche come sostituti parziali di combustibile), fanghi rossi, rocce basaltiche.

Alla quarta classe appartengono prodotti che esercitano un'azione tipicamente funzionale, quali: fondenti e mineralizzanti.

### **Fattori che determinano la possibile utilizzazione di scarti e sottoprodotti.**

La vicinanza fra impianti di produzione di cemento e luoghi di origine degli scarti e sottoprodotti indicati, non costituisce l'unico elemento determinante che ne decide l'impiego. Ad esso si aggiungono: ampia e duratura disponibilità degli scarti; loro compatibilità chimica con le materie prime che compongono le miscele generatrici di clinker; tipo di processo di produzione; volume della stessa; disponibilità di infrastrutture idonee a trattare ed immagazzinare gli scarti.

Considerate la scarsa omogeneità dei residui, talvolta anche provenienti dalla stessa fonte, l'alto tenore di umidità, il carattere vischioso, la finezza, si rende necessario un continuo controllo della loro composizione. Non trascurabili, infine, i problemi che possono derivare dal maneggio dei rifiuti e dalle modalità di alimentazione del forno a cemento.

La trattazione degli scarti e sottoprodotti impiegati come parziali sostituti dei componenti delle miscele generatrici di clinker, viene nel seguito circoscritta a quelli cui si può ricorrere con maggiore frequenza e successo, al fine di fornire una panoramica, certamente non esaustiva, dei vantaggi e benefici che può comportare il loro impiego nell'industria cementiera.

### **Materiali di rimpiazzo di componenti calcarei.**

#### Calcari di ridotta qualità.

Il progressivo esaurimento di calcari di alta qualità spinge ad impiegare anche quelli di qualità inferiore per la formulazione della farina cruda generatrice di clinker di Portland. Si tratta di calcari che recano buone percentuali di silice e di magnesia. Possono venir utilizzati dopo arricchimento. Tenuto conto dei costi, più praticabile appare la loro miscelazione con calcari di buona qualità, ciò che, per ragioni economiche, è divenuto frequente in parecchi impianti negli Stati Uniti (1), senza conseguente negative per il clinker prodotto.

#### Polveri da depurazione dei fumi della combustione dei forni a cemento.

Sono costituite da un fine particolato raccolto negli impianti di depolverizzazione dei fumi.

Esso reca percentuali di calce, unitamente a silice ed allumina, contenute nella farina cruda sottoposta al processo di clinkerizzazione ed a composti alcalini. Tali polveri possono tranquillamente ritornare nella farina cruda, dopo attenta valutazione del tenore di composti alcalini, al fine di evitare la produzione di clinkers ad alto contenuto di alcali.

E' stata anche sviluppata una metodologia che, per lavaggio in torri, rimuove gli alcali, evitando tale pericolo (2).

#### Fanghiglie ricche di calce.

Provengono dall'industria dei fertilizzanti e, oltre ad alte percentuali di calce, recano anche solfato, fluoruro e fosfato. Sono state proposte quale addizione a calcari più poveri di calcio od anche per rimpiazzo di calcare di alta qualità nella farina cruda (1).

La presenza di costituenti accessori impone che il rimpiazzo parziale di calcare non superi il 50%, al fine di evitare negative ricadute su presa ed indurimento del cemento, ascrivibili al fluoruro ed al

fosfato presenti. Regolando opportunamente il tenore di fanghiglia migliora il processo di cottura, per effetto della funzione fondente del fluoruro che agevola la combinazione della calce già a ridotte temperature.

#### Fanghiglie da produzione di carburo.

Il contenuto di cloruri limita ad un massimo del 30% di tale fanghiglia la sostituzione di calcare nella farina cruda. Per l'alta reattività e per il fatto che essa reca già in forma d'idrossido un'aliquota di calcio, il processo di cottura della farina cruda migliora, con minor dispendio di energia. Il clinker prodotto, con fasi principali nella norma, genera un cemento con buone caratteristiche di comportamento.

#### Scoria d'alto forno.

Viene principalmente impiegata per la produzione di cementi compositi. Le ricerche hanno però dimostrato che tanto la scoria d'alto forno vetrosa, quanto quella cristallina (fondi di paiole), sono entrambi adatte anche per la preparazione della farina cruda generatrice di clinker. Quella cristallina si rivela più adatta, perché clinkerizza bene anche tal quale, ciò che si traduce in un risparmio di energia di macinazione.

La sostituzione di calcare con scoria d'alto forno comporta anche un più basso consumo di combustibile, per il ridotto contenuto di prodotto da decarbonatare.

Benché le scorie d'alto forno contengano circa il 40% di calce, generalmente la sostituzione di calcare non supera il 10%, per l'elevato tenore d'allumina e di ossido di magnesio che l'accompagna (3). La loro utilizzazione come componenti della farina cruda di alimentazione dei forni a cemento si traduce in un risparmio di calcare, di minerali di ferro ed in un miglioramento del processo di cottura.

#### Scorie di acciaieria.

Si è anche proposto il loro possibile impiego come sostituti del calcare nelle miscele generatrici di clinker, un impiego non favorito dall'alto contenuto di ferro che recano.

Sono utilizzabili, in limitata quantità, dopo separazione magnetica dei più grossi frammenti di ferro e dopo appropriata miscelazione con scoria d'alto forno.

#### Scorie fosforose.

La produzione di fosforo giallo, per trattamento al forno elettrico del minerale fosfatico, insieme con silice, per avere tutto il calcio sotto forma di una scoria fluida alla temperatura di 1450°C, e coke, per le sue proprietà riducenti, genera una scoria ricca di silicati di calcio e, come costituenti accessori, piccole quantità di fosforo e di fluoruro. Una tonnellata di fosforo genera circa sette tonnellate di scoria.

Tale scoria è stata impiegata (4), in ragione del 2,5%, in sostituzione del calcare della miscela generatrice di clinker ed ha prodotto un cemento di buona resistenza meccanica, con risparmio di energia di calcinazione, grazie alla presenza di fluoruro.

### **Materiali di rimpiazzo di componenti silicei.**

#### Ceneri di pula di riso.

In aree rurali di Paesi emergenti, un posto di eccellenza spetta alla di pula di riso, impiegata sia tal quale, come combustibile, o, dopo incenerimento, per la produzione di cementi compositi (5), grazie alle acquisite virtù "pozzolaniche".

Possano anche esser addizionate alla farina cruda di alimentazione dei forni a cemento come prodotto supplementare siliceo. L'alta produzione ne pone il problema dello smaltimento.

Una tonnellata di riso produce infatti all'incirca duecento chili di pula, con una produzione mondiale di riso che supera i cinquecento milioni di tonnellate/anno. Per incenerimento di duecento chili di pula si originano circa quaranta chili di cenere ad alto contenuto di silice amorfa (circa 90% in peso), accompagnata da un residuo carbonioso prossimo ad 1-5%.

Impiegata come prodotto supplementare siliceo nella farina cruda di alimentazione del forno a cemento, in ragione del 3-5%, contribuisce al risparmio di combustibile, grazie al residuo carbonioso recato e migliora considerevolmente il comportamento alla cottura della farina cruda.

Sabbie di fonderia.

Il materiale da costruzione degli stampi per getti di metalli o leghe fuse è generalmente costituito da sabbie a base di quarzo ( $SiO_2$  circa 90%), con piccole percentuali di argilla. Con esse si realizza un corpo cavo che accoglie la materia da formare.

Tali sabbie vengono impiegate per totale rimpiazzo della silice nelle miscele di alimentazione del forno a cemento.

La presenza del quarzo grossolano nella sabbia, rende più difficile la macinazione del clinker prodotto, perché probabilmente provoca la formazione di cristalli di alite e belite di maggiori dimensioni. Le proprietà fisico-meccaniche del risultante cemento soddisfano, però, i requisiti di norma.

Sabbie da lavaggi.

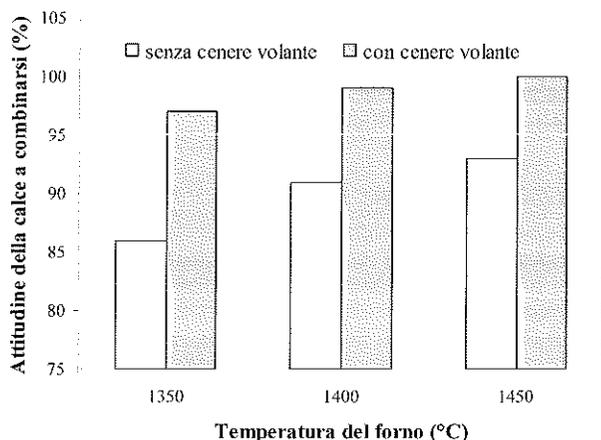
Generalmente sono ricche di silice, con un contenuto prossimo al 75% in peso e sono accompagnate da argilla. Per compatibilità, possono trovare impiego anche nella formulazione della farina cruda generatrice di clinker.

**Materiali di rimpiazzo di componenti argillosi.**

Ceneri volanti.

Vengono prodotte nelle centrali elettriche di trasformazione dell'energia da carbone e costituiscono un'aggiunta minerale idonea alla preparazione di cementi compositi (6).

Essendo principalmente composte da silice attiva, da calcio e ferro, sono largamente compatibili e vengono impiegate per integrare la farina cruda di alimentazione dei forni a cemento, in sostituzione di argilla e di ossido di ferro. Contengono, però, parecchia allumina, ciò che ne limita la quantità addizionabile. Come sostituti, il loro impiego non supera il 10% e si traduce in un'economia di combustibile, in una riduzione delle emissioni di anidride carbonica (3), favorendo, ad un tempo, la combinazione della silice con la calce (7). La figura 1 mostra l'attitudine a combinarsi con la calce della miscela generatrice di clinker, in assenza, o no, di cenere volante.



**Figura 1**

Essendo un prodotto polverulento non richiede macinazione, con evidenti ricadute sul consumo di energia e sulla riduzione della polverizzazione.

Anche ceneri volanti ad alto contenuto di carbone, che non trovano impiego nella produzione di cementi compositi, possono esser utilizzate come integranti delle materie prime generatrici di clinker. Il loro contenuto di carbone funge da combustibile complementare nel corso del processo di clinkerizzazione, risparmiando energia ed aumentando la produzione.

Come sostituti dell'argilla e del ferro si prestano pure le ceneri di fondo, costituite da particelle parzialmente fuse e di maggiori dimensioni. Sono ricche di silice ed allumina e recano, come costituenti minori, ossidi di calcio, di ferro e di magnesio ed anidride solforica. Vengono addizionate prima della macinazione, in proporzione generalmente prossima al 5%, alla miscela cruda e facilitano anch'esse il processo di clinkerizzazione.

#### Fini di catalizzatore.

Sono residui ad alto contenuto di silice (50%) ed allumina (40%) e sono stati proposti come prodotti di rimpiazzo di costituenti delle miscele generatrici di clinker (1).

Un'aggiunta del 10% alla farina di tali fini ha prodotto un clinker di tipo I/II, con un normale contenuto di fasi classiche. La formazione di cristalli di alite più grossi (20-30 micron), ha reso la macinazione un pò più difficile. Non si sono registrati sensibili modificazioni del tempo di presa del cemento e la sua resistenza meccanica a breve è risultata un pò più bassa, ma non così quella a 28 giorni.

#### Fanghi rossi.

Costituiscono residui della preparazione dell'allumina dalla bauxite con il processo Bayer.

La materia prima viene mescolata con soda che solubilizza l'alluminio, lasciando indisciolte le impurezze. Le bauxiti impiegate non devono recare più del 7% di silice, poiché anch'essa si solubilizza in parte. La soluzione ricca di alluminio viene separata dai fanghi per decantazione. Essi, che contengono ossidi di ferro, di titanio e silice, (fanghi rossi), vengono scaricati, previo lavaggio, per il massimo recupero dell'alluminato.

Il ricorso a fanghi rossi consente un risparmio di minerale di ferro ed una facilitazione del processo di cottura.

Con un'aggiunta dell' 8% di un fango rosso recante all'incirca: 9% di silice, 18% di allumina, 15% di calce, 26% di ossido di ferro, 12% di ossido di titanio, 3% di ossido di sodio, è stata formulata una miscela generatrice di clinker (8) che ha prodotto un buon clinker, con fasi principali ben sviluppate.

La quantità di fango rosso da aggiungere alla farina cruda per cemento diminuisce quando esso reca un tenore troppo alto di  $TiO_2$ , per l'influenza negativa sulla formazione di fase fusa.

#### Rocce basaltiche.

Sono rocce eruttive neovulcaniche, caratterizzate dall'associazione di un plagioclasio basico e di un pirosseno e possono contenere, o no, olivina. Abituati accessori sono i minerali metallici (soprattutto magnetite) ed apatite ( $Ca(Cl,F) \cdot Ca_4(PO_4)_3$ ). Normalmente il pirosseno è augitico,

Sono tra le rocce più diffuse, ricche di silice ed allumina, accompagnate da calce, ferro e magnesio. La silice, frazione predominante, si trova in forma di silicati. Il ferro è presente come magnetite ed ilmenite e quasi tutto il magnesio si trova in forma di ferrosilicato.

Sono anch'esse state sperimentate quale correttivo delle miscele di alimentazione dei forni a cemento (9). L'aggiunta del 2% di roccia basaltica alla miscela cruda ha favorito la cottura e determinato una significativa combinazione della calce a silicato tricalcico ad una temperatura più bassa, originando altresì una forma di belite polimorfa, stabilizzata, dotata di maggiore attività idraulica.

**Materiali non sostitutivi, ma funzionali.**

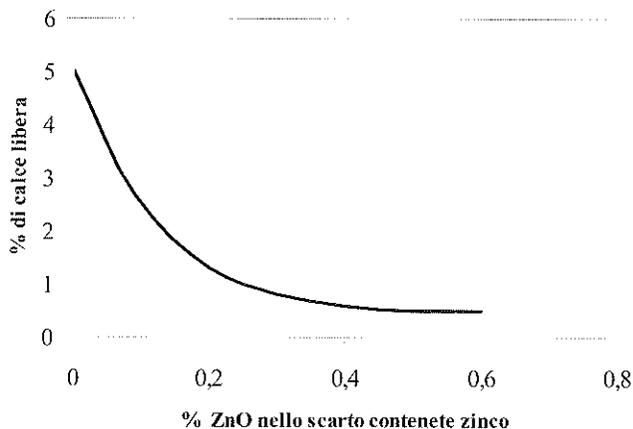
Fanghiglie prodotte dalle industrie.

Gli impianti di solfato ammonico producono un fango principalmente costituito da carbonato di calcio e, come impurezze, solfato (circa 6%), fluoruro (circa 1.2%). Il costituente di maggior interesse è il fluoruro, che migliora il processo di cottura.

Scarti delle industrie dei fluoruri e dei fertilizzanti, il cui componente principale è il fluoruro di calcio, o i composti del fluoro, vengono addizionati alle miscele generatrici di clinker, esplicando funzione di fondenti e mineralizzanti. Tale addizione, riducendo la viscosità del fuso ed accelerando la formazione di silicato tricalcico, promuove la cottura e determina un risparmio di combustibile.

Anche gli scarti di parecchie industrie minerarie possono essere addizionati alle miscele di alimentazione dei forni a cemento. Scopo dell'addizione, recentemente aumentata, è non solo quella di smaltire tali scarti, ma anche di sfruttare nuove risorse di materiali.

I residui dell'industria dello zinco, ad esempio, agevolano la formazione di silicato tricalcico e migliorano le resistenze a breve del cemento. La figura 2 mostra la diminuzione di calce libera in funzione del tenore di ossido di zinco dello scarto addizionato (10).



**Figura 2**

Sono stati anche studiati gli effetti dell'addizione di scarti di minerali molibdeno-ferro alle miscele generatrici di clinker ed il meccanismo del molibdeno nella formazione del clinker (11).

Sono stati impiegati scarti di minerali molibdeno-ferro, reperiti nella provincia cinese dello Zhejiang, contenenti principalmente silicio, ferro, ossidi di calcio ed alluminio e vari elementi in tracce, fra cui il molibdeno. I risultati hanno posto in luce che l'impiego di tali scarti nella produzione di cemento, non solo agevola il processo di cottura con conseguente risparmio di combustibile (5%), ma migliora anche la costituzione del clinker e la qualità del cemento.

Ne accresce inoltre del 13% la produzione.

Produzione di gesso da fanghi di desolfurazione di fumi.

Sono fanghi che vengono raccolti negli apparecchi di trattamento dei fumi della combustione di carboni ad alto contenuto di zolfo, impiegati nella gestione degli impianti termoelettrici.

Per reazione con calce si forma solfito, successivamente ossidato a solfato, e si ottiene un fango al 99% di gesso, che può convenientemente essere impiegato come regolatore della presa del cemento Portland. Risultando finemente suddiviso, comporta un risparmio di energia nella fase di finitura.

Il successivo immagazzinamento può porre qualche problema.

### **Conclusioni.**

Scarti industriali e sottoprodotti vengono sempre più frequentemente impiegati come integratori o come correttivi delle miscele generatrici di clinker. Le ragioni di tale utilizzazione risiedono sostanzialmente nella necessaria salvaguardia dei prodotti naturali (calcare, argilla, gesso, prodotti ferrosi) e nella riduzione delle materie da portare a discarica.

La compatibilità chimica con la farina cruda di alimentazione dei forni a cemento rende consigliabile, concreta e sostenibile la loro utilizzazione, in vista anche della crescente industrializzazione mondiale. L'industria cementiera fa pertanto sempre più largo uso di scarti e sottoprodotti nella produzione di leganti e materiali da costruzione, studiandone attentamente la compatibilità composizionale, l'influenza dei costituenti accessori sul comportamento del prodotto finito, i vantaggi economici ed operativi e le ricadute sulla conservazione dell'ambiente.

Scarti e fanghiglie più frequentemente impiegate provengono principalmente dalle industrie: della carta, dello zucchero, della trasformazione dell'energia, della desolfurazione del carbone, dell'acciaio, dell'alluminio, del carburo di calcio, dei fertilizzanti azotati, della fluorite e possono rimpiazzare prodotti di alta qualità.

Residui solidi quali: ceneri volanti possono esser utilizzate per rimpiazzo di componenti argillosi; scorie d'alto forno, per sostituzione di componenti calcarei.

Il fluoruro presente negli scarti degli impianti di produzione dell'ammonio solfato e fosfato, o dell'industria del fluoro, ne rende possibile l'utilizzazione come potenziale fonte di mineralizzanti e per incrementare la reattività della farina in via di cottura.

Scarti carboniosi provenienti dagli impianti di trasformazione dell'energia, o di desolfurazione dei carboni, sottoprodotti delle industrie siderurgiche, dell'alluminio, del carburo di calcio, dei fertilizzanti, si rivelano di sostegno per aumentare la produzione di cemento. E' ovvio che il livello di sostituzione di materie di maggior pregio è condizionato dalla composizione chimica delle materie sostitutive, da considerazioni di carattere economico e dalla capacità gestionale dell'azienda.

### **Bibliografia.**

1. Bhatti J.I., Gajda J. Use of alternative materials in cement manufacturing. In: Innovations in Portland cement manufacturing. Bhatti Ed. Portland Cement Association. Skokie (Illinois) (2004).
2. Young G.L., Morrison G.L. Passamaquoddy technology recovery scrubber at the Dragon Product Company Inc. Cement Plant. Rock Product. 27 Intern. Cement Seminar, Atlanta (1991).
3. Sersale R. Il contributo dell'industria cementiera all'attenuazione del cambiamento climatico. Rend. Acc. Sci. fis., mat., Napoli, LXXV, (2008).
4. Singh N.B., Bhattacharjee K.N. Phosphorous furnace slag. A potential waste material for the manufacture of cements. Indian Journ. Engineering Mat. Sci. 3, 41-44 (1996).
5. Sersale R. Sostituzione parziale di cemento Portland con prodotti supplementari di seconda generazione. Nota II. Malte e calcestruzzi con addizione di ceneri di pula di riso. Rend. Acc. Sci. fis., mat., Napoli, LXVII, 143-147 (2000).
6. Sersale R. Le ceneri volanti: un prodotto supplementare ancora poco usato nel mondo per la produzione di cementi compositi. Rend. Acc. Sci. fis., mat., Napoli, LXXI, 149-162 (2004).
7. Gore V.K., Khadilkar S.A., Lefe P.G., Page C.H., Chatterjee A.K. Conservation of raw material through use of industrial wastes in cement manufacture. 9<sup>th</sup> ICCO. II, tema 1. 238-244. New Dehli (1992).
8. Laxmi S., Parashar A.K.. Potentials of utilisation of wastes from fertilizer and aluminium industries for building materials: An overview. Nat. Seminar on Role of Building Materials Industries in Conversion of Wastes into Wealth. Vol. II. 101-111 (1985).

9. Khadilkar S.A., Ghosh D., Page C.H. Investigation on the use of basalt as a corrective in Portland cement manufacture. A case study. 2<sup>nd</sup> Int.Seminar., vol.II., 6-12 (1989).
10. Jinyu Z., Yueming F., Hui L., Jiazhi V. Study on using Zn containing waste as mineraliser. Beijing, Proceedings 2<sup>nd</sup> Int. Symp. Cement. Vol. II., 346-352 (1989).
11. Zhou P:Y. Studies on producing Portland cement with tailings of molybdenum-iron ore. 9<sup>th</sup> ICCS., II, tema 1. 271-277 (1992).

## On First Crossing Time Densities of Normal Processes with Oscillatory Covariances

Nota di A. Buonocore<sup>(1)</sup>, A. Di Crescenzo<sup>(2)</sup>, L.M. Ricciardi<sup>(1)</sup>

Presentata dal socio Luigi Maria Ricciardi  
(Adunanza del 6 febbraio, 2009)

*Key words:* Gaussian process, first crossing time, simulations.

**Abstract** - A vector algorithm is provided for simulating stochastic stationary normal processes with rational spectral densities, in order to determine first-crossing-time densities for the general case of time-varying boundaries. The results of massive simulations are discussed and conclusions are drawn on the effects of boundaries and covariances oscillations on determining qualitative and quantitative features of the densities. The observed shapes are seen to depend not only on the forms of the boundaries but also on the specific numerical values of the parameters of the processes. Indeed, they turn out to be unimodal, bimodal or multimodal even for fixed shapes of the covariance functions and of the boundaries. This is unexpectedly different from the case of diffusion processes whose first-crossing-time densities are either unimodal, or rigorously multimodal in the case of periodic boundaries. Such a feature makes normal processes particular suitable for modeling purposes.

**Riassunto** - Si fornisce un algoritmo per la simulazione di processi stocastici gaussiani stazionari a densità spettrali razionali al fine di determinare le densità dei tempi di primo passaggio attraverso barriere in generale variabili. Si discutono i risultati di numerose simulazioni e si traggono conclusioni riguardo l'effetto delle oscillazioni presenti nelle barriere e nelle covarianze sulle caratteristiche qualitative e quantitative delle rispettive densità del tempo di primo passaggio. Proprietà caratteristica di tali densità è che esse risultano essere unimodali, bimodali o multimodali in dipendenza dei valori dei parametri presente nelle covarianze, ben diversamente dal caso dei processi di diffusione per i quali la multimodalità si verifica soltanto nel caso di barriere oscillanti. Tale peculiarità rende i processi gaussiani particolarmente adatti in problemi di modellistica in ambito stocastico.

---

(1) Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II.

(2) Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Salerno.

## 1 - INTRODUCTION

The purpose of the present paper is to discuss certain procedures and methods to obtain analytic and algorithmic solutions to the problem of determining the first-crossing-time (FCT) probability densities and their relevant statistics for continuous state-space and continuous parameter stochastic processes. Emphasis will be on non-Markov normal processes for which the existing literature on FCT problems is particularly scarce and fragmentary. Quite different is the situation for similar problems in the case of Markov processes of the diffusion type, for which numerous theoretical and computational results have been made. Certain difficulties that prevent from extending such results to non-Markov normal processes will occasionally be pinpointed.

The FCT problem is a standard topic for most treatises on stochastic processes. Nevertheless, the stringent and numerous motivations of applied nature that throughout the years have increasingly demanded for a systematic solution, have seldom been emphasized.

In the study of the dynamics of a system subject to stochastic evolution, the attention is usually put on the laws regulating the time course of the distribution function, or the transition probability density function (pdf), by which one can express the probability for the system to occupy at given times any preassigned configuration of the state space. In other words, it is customary to pay attention to the time evolution of the considered system through the state space starting either from a uniquely preassigned initial state or from a state whose probability distribution is assumed to be given.

We shall refer to the description of such an evolution of a dynamical system as to the description of the “free” evolution. However, for certain kinds of problems a different type of description is required: this consists of preassigning certain regions of the state space and then determining the probability distribution of the time when first such regions are entered by the considered system. Such problems naturally arise when for instance the above-mentioned regions of the state space are in some sense “critical”. By this term one may imply that once the system has reached such regions the very evolution law may change; alternatively, one might imagine that certain mechanisms arise, that are able to generate some previously absent effects of special interest or relevance. Entering such critical regions at times can be viewed as the case for the disappearance of the system under consideration: a kind of well or “black hole” that swallows the sys-

tem. Some other examples that pinpoint the interest of FCT problems are offered by a variety of topics of relevant practical importance. Imagine, for instance, the stresses of random nature to which a building or a bridge are subject. If consequently one such system departs from the elastic response region, an irreversible event, i.e. the insurgence of the plastic regime, takes place, which may induce the collapse of the considered system. The determination of the probability distribution of the random variable representing the instant when for the first time the plastic regime is entered is a typical FCT problem.

Another example in which an important role is played by the time when first a system enters a preassigned configuration arises in some problems of population dynamics. Indeed, it is well known (see, for instance, Crow and Kimura 1970 and Maruyama 1977) that under suitable assumptions the frequency of an allele in a population characterized by two alleles at one locus can be modeled by a continuous Markov process in the diffusion interval  $(0, 1)$ . When the end points of such interval are attained by the process, extinction and fixation occur. Extinction may for instance depict the disappearance of some genetic defect from the population: it is thus evident the relevance of the random variable representing the time necessary for such an event to occur.

Numerous other examples stressing the importance of FCT problems are offered by various fields. For instance, in theoretical neurobiology the neuronal firing may sometimes be viewed as a FCT of the potential difference across the neuronal membrane through some threshold value; in astrophysics one can think of the time necessary for a star to escape from a galaxy; other examples are offered by fields as diversified as economy or psychology and, of course, mechanical engineering in which first crossing time problems bear relevance in the context of stability and integrity of systems subject to random vibrations (cf., for instance, Nielsen and Sorensen 1988 and Nielsen 1990).

From a mathematical point of view the difficulties that one meets when facing FCT problems basically originate from the circumstance that such problems are, so to say, of an inverse nature with respect to the standard problems: in FCT problems the time variable is not viewed as "free", but is itself the unknown of the problem, whose probability distribution is to be determined. Indeed, in FCT problems in place of determining the probability distribution of the states  $X(t)$  entered by a dynamical system,

one considers for instance a fixed state  $S$ , then looks for the solutions of equation  $X(t) = S$  and finally picks up the smallest solution.

The available methods and procedures to deal with FCT problems vary with the nature of the involved stochastic processes. In the sequel we shall confine our attention to stochastic processes with continuous state space and continuous time. Section 2 will be devoted to establishing the notation and to recalling the background necessary to deal with FCT problems for continuous Markov processes (i.e. diffusion processes). For brevity, we shall refrain from mentioning the numerous contributions to the solution of FCT problems for diffusion processes and limit ourselves to pointing out the articles by Abrahams (1986), Blake and Lindsey (1973), Ricciardi and Sato (1990) and Ricciardi et al. (1999), where rather comprehensive bibliographies are also present. The remaining part of the paper deals exclusively with normal processes. In Section 3 we shall review the basic definitions and state the main necessary results. (Proofs can be found in any standard text on random processes such as Jazwinski 1970.) A notation is used which is especially useful for the discussion of FCT problems. In Section 4 some motivations are given that underline the usefulness of normal processes for model building. In Section 5 a series expansion for the FCT pdf is rigorously obtained (see also Ricciardi and Sato 1983 and Ricciardi and Sato 1986). Section 6 is entirely concerned with the discussion of an algorithm able to simulate sample paths of a normal process with preassigned spectral densities of a rational type (see Franklin 1965). Such an algorithm, conveniently vectorized, has been extensively implemented by as reported here as well as in several articles (see Di Nardo and Pirozzi 1997, Di Nardo et al. 1997, 2000, 2001a, 2003a, 2003b and references therein), all motivated by one of our previous unpublished technical reports. All of them have been finalized to construct FCT densities for normal processes through constant as well as through periodically varying boundaries, to explore the possible different shapes of the FCT densities as determined by the oscillatory behaviors of covariances and boundaries (see Section 7). Section 8 shows the details of the simulation and vectorization procedures as well as of their implementations. Section 9 contains the results of the analysis of the simulations for a normal process with a Butterworth covariance of the second type, both for constant and for periodic boundaries. In Section 10 a similar analysis is carried out for the case of a two-parameter covariance for which period of oscillations and damping rate can be inde-

pendently assigned. It should be pointed out that some complementary computational results have also been briefly discussed in previous reports (see Buonocore et al. 1990b, Di Crescenzo et al. 1990, Iardino et al. 1990, Ricciardi and Sato 1990). Finally, section 11 provides a simple method to obtain FCT densities for certain choices of the parameters starting from previously computed FCT densities. In such a way, a relevant saving of computation time may be achieved.

## 2 - BACKGROUND AND NOTATION

Let  $\{X(t); t \in [t_0, \infty), t_0 \in \mathbb{R}\}$  be a stochastic process in  $\mathbb{R}$  and let  $P\{X(t_0) = x_0\} = 1, x_0 \in \mathbb{R}$ . Let us define the following functions:

$$(2.1) \quad F(x, t | x_0, t_0) = P\{X(t) \leq x | X(t_0) = x_0\}$$

and

$$(2.2) \quad f(x, t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, t | x_0, t_0).$$

The former is the distribution function of  $X(t)$  conditioned by the initial state  $x_0 = X(t_0)$  at the initial time  $t_0$ ; the latter is the conditioned pdf of  $X(t)$ . If  $X(t)$  is Markov,  $f$  identifies with the transition pdf. We now define the random variable

$$(2.3) \quad \mathcal{T} = \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0\},$$

representing the FCT of  $X(t)$  through the time-dependent boundary (or barrier or “threshold”),  $S(t)$  for  $x_0 = X(t_0) < S(t_0)$ . Let us denote by

$$(2.4) \quad g[S(t), t | x_0, t_0] = \frac{\partial}{\partial t} P\{\mathcal{T} \leq t\}$$

the FCT pdf of  $X(t)$  through  $S(t)$ . Finally, let us define the conditional pdf of  $X(t)$  in the presence of an absorbing barrier  $S(t)$ . To this purpose one has to construct the conditional pdf of the sample paths originating at  $x_0$  at time  $t_0$  that up to time  $t$  did not cross  $S(t)$ . Denoting such pdf by

$\alpha^{S(t)}(x, t | x_0, t_0)$ , it is easy to convince oneself that the following identity holds:

$$(2.5) \quad \int_{-\infty}^{S(t)} \alpha^{S(t)}(x, t | x_0, t_0) dx = 1 - \int_{t_0}^t g[S(\tau), \tau | x_0, t_0] d\tau.$$

Hence,

$$(2.6) \quad g[S(t), t | x_0, t_0] = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{S(t)} \alpha^{S(t)}(x, t | x_0, t_0) dx.$$

One thus understands that the problem of determining the FCT pdf for a stochastic process offers the same degree of difficulties as the determination of the conditional pdf in the presence of an absorbing boundary. In the few instances in which the latter can be determined, via equation (2.6) one immediately obtains the function  $g$ .

The above definitions can be immediately extended to the case when  $x_0 = X(t_0) > S(t_0)$ . Then, one refers to the FCT through a “lower” barrier or threshold. In the sequel we shall exclusively refer to the case  $x_0 < S(t_0)$ , i.e. to FCT problems through “higher” boundaries.

It is finally possible to take into account FCT problems through a pair of boundaries. Indeed, let  $S_1(t)$  and  $S_2(t)$  be continuous functions such that  $S_1(t_0) < x_0 < S_2(t_0)$ . One can then define the random variable  $T^+$  representing the FCT through the higher boundary  $S_2(t)$  with the condition that  $S_1(t)$  has not been previously crossed. Similarly, one can define a random variable  $T^-$  denoting the FCT through the lower barrier  $S_1(t)$  with the condition that  $S_2(t)$  has not been crossed before. The FCT pdf's  $g^+$  and  $g^-$  are correspondingly defined. Their sum,  $g = g^+ + g^-$ , finally provides the FCT pdf of  $X(t)$  through any of the two boundaries, namely the pdf of the time when first the process  $X(t)$ , conditioned by  $X(t_0) = x_0$ , leaves the region  $\{x \in \mathbb{R} : S_1(t) < x < S_2(t)\}$ ,  $\forall t \geq t_0$ . A rigorous definition of such random variable and of its corresponding pdf's can be found in Buonocore et al. (1990a).

FCT problems have been extensively studied for continuous Markov processes, i.e. for diffusion processes. The transition pdf  $f(x, t | x_0, t_0)$  is then solution of Kolmogorov equation

$$(2.7) \quad \frac{\partial f}{\partial t_0} + A_1(x_0, t_0) \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{1}{2} A_2(x_0, t_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0,$$

with the initial condition

$$(2.8) \quad \lim_{t \downarrow t_0} f(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0),$$

where the coefficients are the drift and infinitesimal variance of  $X(t)$ , respectively:

$$(2.9) \quad A_k(x_0, t_0) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x_0)^k f(y, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dy, \quad (k = 1, 2).$$

The Markov nature of diffusion processes allows one to write down some Volterra-kind integral equations in the unknown FCT pdf. Here we limit ourselves to recalling Fortet equation

$$(2.10) \quad f(x, t | x_0, t_0) = \int_{t_0}^t g[S(\tau), \tau | x_0, t_0] f[x, t | S(\tau), \tau] d\tau,$$

where a single boundary  $S(t)$ , such that  $S(t_0) > x_0$ , has been considered and where  $x > S(t)$  is an otherwise arbitrary real. As proved in Fortet (1943), equation (2.10) remains valid in the limit as  $x \downarrow S(t)$ :

$$(2.11) \quad f[S(t), t | x_0, t_0] = \int_{t_0}^t g[S(\tau), \tau | x_0, t_0] f[S(t), t | S(\tau), \tau] d\tau.$$

This is a Volterra first kind integral equation whose kernel and left-hand-side term are specified once the transition pdf has been determined. The main difficulty one faces when looking for the solution of equation (2.11) is due to the singular nature of the kernel for  $\tau = t$ . This circumstance has suggested the search for alternative equations possessing continuous kernels. In previous papers (Buonocore et al. 1987, Buonocore and Visentin 1992, Giorno et al. 1989b), it has been proved that this task can indeed be achieved, and algorithms to obtain numerical solutions in a sufficient rapid fashion have been provided.

Totally different is the situation when  $X(t)$  is a non-Markov process. Indeed, even though  $\mathcal{T}$ , the FCT through a boundary  $S(t)$ , and the random variables  $\mathcal{T}^+$  and  $\mathcal{T}^-$  can be similarly defined, it does not appear that equations can be obtained in which the corresponding FCT pdf's appear as the unknown functions.

Before coming to the problem of evaluating FCT densities for normal processes, we shall recall the main definitions and the essential properties of the normal processes in a form that suits our needs.

### 3 - NORMAL PROCESSES

We start with an outline (see, for instance, Tong 1990) of the essential properties of normal random variables in  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ).

**Definition 3.1** A random variable defined in a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  is said to be Gaussian, or normally distributed, with mean  $m$  and variance  $\sigma^2$  if its pdf  $f_1(x)$  is given by

$$(3.1) \quad f_1(x) \equiv f(x; m, \sigma^2) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} Q_1(x; m, \sigma^2)\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

where

$$(3.2) \quad Q_1(x; m, \sigma^2) = \frac{(x - m)^2}{\sigma^2} \equiv (x - m)(\sigma^2)^{-1}(x - m),$$

with  $m \in \mathbb{R}$  and  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ .

**Definition 3.2** The random vector  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  is said to be normally distributed if the one-dimensional random variables  $X_1$  and  $X_2$  are defined in the same probability space and if their joint pdf  $f_2(x_1, x_2)$  is

$$(3.3) \quad f_2(x_1, x_2) \equiv f(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Lambda) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} Q_2(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Lambda)\right\}}{2\pi\sqrt{|\Lambda|}}, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2)$$

where

$$(3.4) \quad Q_2(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Lambda) = (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})$$

with

$$(3.5a) \quad \mathbf{m} = [E(X_1), E(X_2)]^T = (m_1, m_2)^T$$

and

$$(3.5b) \quad \Lambda = E[(\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

in which, per  $j = 1, 2$ ,  $\sigma_j = \text{var}(X_j) > 0$ ,  $\sigma_{12} = \text{cov}(X_1, X_2)$ . Finally,  $|\Lambda| \equiv \det \Lambda = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 > 0$ . Denoting by  $\rho = \sigma_{12} / \sigma_1 \sigma_2$  ( $|\rho| < 1$ ) the correlation coefficient of  $X_1$  and  $X_2$ , one has:

$$(3.6) \quad |\Lambda| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2).$$

Furthermore, since  $|\Lambda| > 0$  the matrix  $\Lambda^{-1}$  exists and is given by

$$(3.7) \quad \Lambda^{-1} = \frac{1}{|\Lambda|} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1 \sigma_2 \rho \\ -\sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

Making use of (3.4)–(3.7), the pdf (3.3) of  $\mathbf{X}$  takes the form:

$$(3.8) \quad f_2(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - 2\rho \left( \frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Hence, the characteristic function of  $\mathbf{X}$  is

$$(3.9) \quad \varphi_{\mathbf{X}}(u_1, u_2) \equiv E \left[ \exp \{ i (u_1 X_1 + u_2 X_2) \} \right] \\ = \exp \left\{ i (m_1 u_1 + m_2 u_2) - \frac{1}{2} P_2(\mathbf{u}; \Lambda) \right\}$$

where

$$(3.10) \quad P_2(\mathbf{u}; \Lambda) = \mathbf{u}^T \Lambda \mathbf{u} = \sigma_1^2 u_1^2 + 2\sigma_{12} u_1 u_2 + \sigma_2^2 u_2^2.$$

**Remark 3.1** Definition 3.2 is meaningful as far as  $\Lambda$  is non singular. If  $|\Lambda| = 0$  the definition of a normal two-dimensional random variable cannot be given by means of (3.3).

**Definition 3.3** If  $|\Lambda| = 0$  the random variables  $X_1$  and  $X_2$  are said to be jointly normal if their characteristic function is given by (3.9). The normal distribution is then said to be singular.

**Definition 3.4** A random vector  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  whose components are defined on the same probability space is normal, or Gaussian, if its characteristic function has the form

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \varphi_{\mathbf{X}}(u_1, u_2, \dots, u_n) &\equiv E \left[ \exp \{ i(u_1 X_1 + u_2 X_2 + \dots + u_n X_n) \} \right] \\ &= \exp \left\{ i \sum_{r=1}^n m_r u_r - \frac{1}{2} P_n(\mathbf{u}; \Lambda) \right\} \end{aligned}$$

where  $m_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $\Lambda$  is a  $n \times n$  non-negative definite symmetric matrix and  $P_n(\mathbf{u}; \Lambda)$  is the quadratic form associated to  $\Lambda$ :

$$(3.12) \quad P_n(\mathbf{u}; \Lambda) = \mathbf{u}^T \Lambda \mathbf{u} = \sum_{r,k=1}^n u_r u_k \lambda_{rk}.$$

The constants  $m_r$  in (3.11) are the mean values of  $X_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ):

$$(3.13) \quad \mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T = [E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)]^T.$$

Finally,  $\Lambda$  is the covariance matrix whose elements  $\lambda_{jk}$  are defined as follows:

$$(3.14) \quad \lambda_{jk} = E[(X_j - m_j)(X_k - m_k)], \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

**Remark 3.2** If  $|\Lambda| > 0$ , from (3.11) one obtains the  $n$ -dimensional joint pdf  $f_n(\mathbf{x})$ :

$$(3.15) \quad f_n(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Lambda) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} Q_n(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Lambda) \right\}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\Lambda|}},$$

where

$$(3.16) \quad Q_n(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Lambda) = (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) = \sum_{j,k=1}^n l_{jk} (x_j - m_j)(x_k - m_k),$$

with  $l_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, \dots, n$ ) denoting the  $(j, k)$  element in  $\Lambda^{-1}$ .

In view of the forthcoming considerations, let us write down explicitly the conditional pdf of  $n + 1$  jointly distributed Gaussian random variables  $X_r$  ( $r = 0, 1, \dots, n$ ), assuming that such distribution is non-singular and that  $E(X_r) = 0$  ( $r = 0, 1, \dots, n$ ). From (3.1), (3.15) and (3.16) one obtains:

$$(3.17) \quad f_n(x_1, \dots, x_n | x_0) \equiv \frac{f_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_0)} \\ = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j,k=0}^n l_{j+1,k+1} x_j x_k - \frac{x_0^2}{\sigma_0^2}\right)\right\}}{\sqrt{(2\pi)^n |\Lambda|}}$$

where, now, the covariance matrix refers to variables  $X_0, X_1, \dots, X_n$  and  $\sigma_0^2 = \lambda_{11}$ .

**Definition 3.5** Let  $T \subseteq \mathbb{R}$ . A continuous-parameter stochastic process  $\{X(t), t \in T\}$  is normal if the random variables  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  are jointly normal for all  $n \in \mathbf{N}$  and for all  $n$ -tuples  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ( $t_r \in T; r = 1, 2, \dots, n$ ).

**Definition 3.6** A random process  $\{X(t), t \in T\}$ , where  $T$  is a linear set (i.e. if  $t, \tau \in T$  then  $t + \tau \in T$ ) is said to be strictly stationary (or, for short, stationary) if its probability law coincides with that of  $\{X(t + \tau), t \in T\}$  for any  $\tau \in T$ .

In other words, for a strictly stationary process one has

$$(3.18) \quad f_n(X(t_1), \dots, X(t_n)) = f_n(X(t_1 + \tau), \dots, X(t_n + \tau))$$

for all  $n \in \mathbf{N}$ , for all  $n$ -tuples  $(t_1 < \dots < t_n)$  and for all  $\tau \in T$ .

**Remark 3.3** For  $n = 1$  and  $n = 2$ , (3.18) yields

$$\forall t_1 \in T, \quad f_1(X(t_1)) \equiv f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1),$$

$$\forall t_1 < t_2 \in T, \quad f_2(X(t_1), X(t_2)) \equiv f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = f_2(x_1, x_2, t_2 - t_1),$$

respectively.

From Remark 3.3 one sees that, if existing, mean and variance of such a process are time independent:

$$(3.19) \quad E[X(t)] = \mu, \quad E\{[X(t) - \mu]^2\} = \sigma^2.$$

Similarly, if existing, the correlation function  $\gamma(t_1, t_2)$ , for  $t_2 > t_1$ , depends only on the difference  $t_2 - t_1$  and not on  $t_1$  and  $t_2$ , separately. Hence, for all  $t_1, t_2 \in T$  one has:

$$(3.20) \quad \gamma(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_2)X(t_1)] = \gamma(|t_2 - t_1|)$$

implying

$$(3.21) \quad \gamma(-t) = \gamma(t).$$

Furthermore,

$$(3.22) \quad E[X^2(t)] = \gamma(0).$$

Since  $\gamma(t)$  is an even function, in the sequel we shall limit ourselves to specifying the positive branch alone.

By virtue of relations (3.19) and (3.20) the covariance function  $c(t_1, t_2)$  also depends on the unique parameter  $|t_1 - t_2|$ :

$$(3.23) \quad \begin{aligned} c(t_1, t_2) &\equiv E\left\{\{X(t_1) - E[X(T_1)]\}\{X(t_2) - E[X(t_2)]\}\right\} \\ &= \gamma(|t_2 - t_1|) - E[X(t_1)]E[X(t_2)] = \gamma(|t_2 - t_1|) - \mu^2. \end{aligned}$$

**Definition 3.7** A random process  $\{X(t), t \in T\}$ , is weakly stationary (or wide sense stationary, or covariance stationary) if it possesses finite second order moments ( $|E\{X^2(t)\}| < \infty, \forall t \in T$ ), constant mean and correlation function  $E[X(t)X(s)]$  depending on  $t$  and  $s$  only through their difference  $|t - s|$ .

**Remark 3.4** A strictly stationary random process possessing finite second order moments is wide sense stationary. The converse does not generally hold; the reason is that weak stationarity only involves first and second order moments.

Note that if  $X(t)$  is Gaussian then weak stationarity implies strict stationarity. Indeed its probability law is completely specified by first and second order moments.

**Remark 3.5** It is worth remarking explicitly that if  $X(t)$  has finite second order moments then  $m(t) = E[X(t)]$  and the correlation function  $\gamma(t, \tau) =$

$E[X(t)X(\tau)]$  exists for all  $t, \tau \in T$ . Furthermore, the covariance function  $c(t, \tau)$  also exists for all  $t, \tau \in T$  since

$$c(t, \tau) = \gamma(t, \tau) - m(t)m(\tau).$$

**Definition 3.8** Let  $\{X(t), t \in T\}$  be a continuous parameter stochastic process and let  $E\{|X(t)|^2\} < \infty$  for all  $t \in T$ .  $X(t)$  is said to be mean square (m.s.) continuous for  $t \in T$  if one has

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} E\{[X(t+\tau) - X(t)]^2\} = 0.$$

Such limit is often denoted as

$$\text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} X(t+\tau) = X(t).$$

From

$$(3.24) \quad E\{[X(t+\tau) - X(t)]^2\} = \gamma(t+\tau, t+\tau) - \gamma(t+\tau, t) - \gamma(t, t+\tau) + \gamma(t, t)$$

and since

$$\lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} E[X(t+\tau)X(t+\tau')] = \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} \gamma(t+\tau, t+\tau'),$$

one can easily prove (cfr., for instance, Jazwinski 1970) the following results.

**Theorem 3.1** The process  $\{X(t), t \in T\}$  is mean square continuous for  $t \in T$  iff the correlation function  $\gamma(t, \tau)$  is continuous at  $(t, t)$ .

**Corollary 3.1** If  $\gamma(t, \tau)$  is continuous in each point of the diagonal  $t = \tau$  it is also continuous in each point  $(t, \tau)$ .

Note that if  $X(t)$  is stationary from (3.24) one obtains

$$E\{[X(t+\tau) - X(t)]^2\} = 2[\gamma(0) - \gamma(\tau)].$$

Therefore, the following theorem holds.

**Theorem 3.2** A stationary process  $\{X(t), t \in T\}$  is m.s. continuous iff its correlation function  $\gamma(t)$  is continuous at  $t = 0$ .

**Definition 3.9** A stochastic process  $\{X(t), t \in T\}$  admits m.s. derivative at  $t \in T$  if the limit

$$\text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} = \dot{X}(t)$$

exists. In such a case one writes

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

The following theorems hold (see, for instance, Jazwinski 1970).

**Theorem 3.3** If  $\{X(t), t \in T\}$  admits m.s. derivative at  $t \in T$ , then it is there m.s. continuous.

**Theorem 3.4** The stochastic process  $\{X(t), t \in T\}$  admits m.s. derivative at  $t \in T$  iff  $\partial^2 \gamma(t, \tau) / \partial t \partial \tau$  exists at  $(t, t)$ .

**Corollary 3.2** If  $\partial^2 \gamma(t, \tau) / \partial t \partial \tau$  exists in each diagonal point  $(t, t)$ , then it exists in each point  $(t, \tau)$ .

**Theorem 3.5** If  $\{X(t), t \in T\}$  is stationary, it admits m.s. derivative iff  $\partial^2 \gamma(t, t) / \partial t^2$  exists at  $t = 0$ .

**Theorem 3.6** Let  $\{X(t), t \in T\}$  be a stochastic process possessing m.s. derivative in  $T$ . Then,

$$m_{\dot{X}}(t) \equiv E[\dot{X}(t)] = \frac{d}{dt} E[X(t)] \equiv \dot{m}_X(t),$$

$$\gamma_{\dot{X}X}(t, \tau) \equiv E[\dot{X}(t)X(\tau)] = \frac{d}{dt} E[X(t)X(\tau)] \equiv \frac{\partial \gamma_{XX}(t, \tau)}{\partial t},$$

$$\gamma_{\dot{X}\dot{X}}(t, \tau) \equiv E[\dot{X}(t)\dot{X}(\tau)] = \frac{d}{dt} \frac{d}{d\tau} E[X(t)X(\tau)] \equiv \frac{\partial^2 \gamma_{XX}(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}.$$

Let us now assume that  $X(t)$  is a zero-mean stationary normal process. For all  $t \in T$  the random variable  $X(t)$  is then Gaussian with zero mean and variance  $\gamma(0)$ , i.e. its pdf is

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \gamma(0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{x^2}{\gamma(0)} \right\}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Proposition 3.1** Let  $X(t)$  is a zero-mean stationary normal process having  $\gamma(\tau)$  as correlation function and possessing m.s. derivative. Let  $\Lambda_{2n+1} = \|\lambda_{j,k}\|$  be the covariance matrix of

$$X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n), \dot{X}(t_1), \dots, \dot{X}(t_n)$$

with  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Then,  $\Lambda_{2n+1}$  is a symmetric matrix whose elements are specified as follows:

$$(3.25a) \quad \lambda_{j+1,k+1} = E[X(t_j)X(t_k)] = \gamma(t_j - t_k) \quad (j, k = 0, 1, \dots, n),$$

$$(3.25b) \quad \lambda_{n+j+1,n+k+1} = E[\dot{X}(t_j)\dot{X}(t_k)] = -\ddot{\gamma}(t_j - t_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots, n),$$

$$(3.25c) \quad \lambda_{j+1,n+k+1} = E[X(t_j)\dot{X}(t_k)] = -\dot{\gamma}(t_j - t_k) \quad (j = 0, 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n).$$

**Proof** By definition of covariance for a zero-mean process and from the stationarity of  $X(t)$  relation (3.25a) follows. Similarly one has

$$\lambda_{n+j+1,n+k+1} = E[\dot{X}(t_j)\dot{X}(t_k)] \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

From Theorem 3.6 and (3.21) one then easily obtains (3.25b). Making again use of Theorem 3.6 and of (3.21), relation (3.25c) finally follows.  $\diamond$

Let us now calculate the conditional pdf  $p_{2n}(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n | x_0)$  of

$$X(t_1), \dots, X(t_n), \dot{X}(t_1), \dots, \dot{X}(t_n)$$

conditional upon  $X(t_0) = x_0$ , when  $\gamma(0) = 1$  and  $\ddot{\gamma}(0) \equiv \{d^2\gamma(t)/dt^2\}_{t=0}$  exists and is finite.

By virtue of (3.17) one can then write

$$(3.26) \quad p_{2n}(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n | x_0) = \frac{p_{2n+1}(x_0, x_1, \dots, \dot{x}_n)}{p_1(x_0)} \\ = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} x_i x_j - x_0^2\right)\right\}}{(2\pi)^n |\Lambda_{2n+1}|^{1/2}},$$

where for  $i = 1, \dots, n$  we have set

$$x_{n+i} = \dot{x}_i, \quad \gamma(t_{n+i}) = \dot{\gamma}(t_i).$$

(Recall that any linear operation, such as differentiation or integration, on a normal process yields a normal process.)

One can see that the following equalities hold:

$$(3.27a) \quad \sum_{i=0}^{2n} \lambda_{i+1,j+1} l_{i+1,k+1} = \sum_{i=0}^{2n} \lambda_{j+1,i+1} l_{i+1,k+1} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

$$(3.27b) \quad \sum_{j=0}^{2n} \lambda_{i+1,j+1} l_{k+1,j+1} = \sum_{j=0}^{2n} \lambda_{j+1,i+1} l_{k+1,j+1} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Hence,

$$(3.28a) \quad \sum_{i=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_i) = \sum_{i=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \lambda_{i+1,1} = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0, \end{cases}$$

$$(3.28b) \quad \sum_{j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_j) = \sum_{j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \lambda_{1,j+1} = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$$

Making use of (3.27) and (3.28) one has:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} x_i x_j - x_0^2 &= \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} x_i x_j - x_0^2 - x_0^2 + x_0^2 \\
 &= \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} x_i x_j - x_0 \sum_{j=0}^{2n} x_j \sum_{i=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_i) \\
 &\quad - x_0 \sum_{i=0}^{2n} x_i \sum_{j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_j) + x_0^2 \sum_{i=0}^{2n} \gamma(t_i) \sum_{j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_j) \\
 &= \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} x_i x_j - \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_i) x_0 x_j \\
 &\quad - \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_j) x_0 x_i + \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} \gamma(t_i) \gamma(t_j) x_0^2 \\
 &= \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} [x_i x_j - \gamma(t_i) x_0 x_j - \gamma(t_j) x_0 x_i + \gamma(t_i) \gamma(t_j) x_0^2] \\
 &= \sum_{i,j=0}^{2n} l_{i+1,j+1} [x_i - x_0 \gamma(t_i)] [x_j - x_0 \gamma(t_j)].
 \end{aligned}$$

The function  $p_{2n}$  given by (3.26) thus takes the following form:

$$\begin{aligned}
 p_{2n} &= (x_1, \dots, x_n \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n | x_0) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n |\Lambda_{2n+1}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} L_{i+1,j+1} [x_i - x_0 \gamma(t_i)] [x_j - x_0 \gamma(t_j)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Hereafter  $t$  will be identified with the time variable and hence we shall take  $t \in [t_0, +\infty)$ , with  $t_0 \geq 0$ . In the case of stationary processes, no loss of generality arises by taking  $t_0 = 0$ , which will be consistently done in the sequel.

#### 4 - NORMAL PROCESSES AND STOCHASTIC MODEL BUILDING

The purpose of this Section is to provide a brief discussion of certain other features of non stationary normal processes and to outline their use in building stochastic models by means of first-order differential equation involving a colored noise in place of the customary white noise.

We start with the determination of the conditional pdf of a general normal process. To this purpose, let  $\{X(t), t \geq t_0 \text{ (} t_0 \in \mathbb{R})\}$  be a non stationary normal process with mean  $m(t) = E[X(t)]$ , covariance  $c(t, t') = E[X(t)X(t')] - m(t)m(t')$  and hence variance  $\text{var}[X(t)] = c(t, t)$ .

To obtain the pdf of  $X(t)$  conditional on  $X(t_0) = x_0$  let us denote by  $Y(t)$  the standard of  $X(t)$ :

$$(4.1) \quad Y(t) = \frac{X(t) - E[X(t)]}{\sqrt{\text{var}[X(t)]}} \equiv \frac{X(t) - m(t)}{\sqrt{c(t, t)}}.$$

Hence,  $E[Y(t)] = 0$  and  $\text{var}[Y(t)] = 1$ . The correlation function of  $Y(t)$  is then:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \gamma_Y(t, t') &\equiv E[Y(t)Y(t')] \\ &= E \left\{ \left( \frac{X(t) - E[X(t)]}{\sqrt{\text{var}[X(t)]}} \right) \left( \frac{X(t') - E[X(t')]}{\sqrt{\text{var}[X(t')]} } \right) \right\} \\ &= \frac{E[X(t)X(t')] - m(t)m(t')}{\sqrt{c(t, t)c(t', t')}} = \frac{c(t, t')}{\sqrt{c(t, t)c(t', t')}}. \end{aligned}$$

Because of (4.1), the pdf's of  $X(t)$  and  $Y(t)$  are related as:

$$f_X(x, t | x_0, t_0) = \frac{dy}{dx} f_Y(y, t | y_0, t_0), \quad y = \frac{x - m(t)}{\sqrt{c(t, t)}},$$

i.e.,

$$(4.3) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{c(t, t)}} f_Y \left( \frac{x - m(t)}{\sqrt{c(t, t)}}, t \left| \frac{x_0 - m(t_0)}{\sqrt{c(t_0, t_0)}}, t_0 \right. \right).$$

Let us now calculate the conditional pdf  $f_Y(y, t | y_0, t_0)$ . Recalling that  $\gamma_Y(t, t) = 1$ , using (3.17) written for  $n = 1$ , we obtain:

$$(4.4) \quad f_Y(y, t | y_0, t_0) = \frac{f_Y(y, t; y_0, t_0)}{f_Y(y_0, t_0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi [1 - \gamma_Y^2(t, t_0)]}} \exp \left\{ -\frac{[y - y_0 \gamma_Y(t, t_0)]^2}{2 [1 - \gamma_Y^2(t, t_0)]} \right\}.$$

From (4.3) and (4.4) we obtain:

$$(4.5) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{c(t, t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi [1 - \gamma_Y^2(t, t_0)]}} \times \exp \left\{ -\frac{\left[ \frac{x - m(t)}{\sqrt{c(t, t)}} - \gamma_Y(t, t_0) \frac{x_0 - m(t_0)}{\sqrt{c(t_0, t_0)}} \right]^2}{2 [1 - \gamma_Y^2(t, t_0)]} \right\}.$$

By virtue of (4.2), from (4.5) we have:

$$(4.6) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = \left\{ 2\pi c(t, t) \left[ 1 - \frac{c^2(t, t_0)}{c(t, t) c(t_0, t_0)} \right] \right\}^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c^2(t, t_0)}{c(t, t) c(t_0, t_0)} \right]^{-1} \left[ \frac{x - m(t)}{\sqrt{c(t, t)}} - \frac{c(t, t_0)}{c(t_0, t_0)} \frac{x_0 - m(t_0)}{\sqrt{c(t, t)}} \right]^2 \right\}.$$

Setting then

$$(4.7) \quad U(t, t_0) = c(t, t) \left[ 1 - \frac{c^2(t, t_0)}{c(t, t) c(t_0, t_0)} \right],$$

from (4.6) the required conditional pdf follows:

$$(4.8) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = \frac{\exp \left\{ -\frac{\left[ x - m(t) - \frac{c(t, t_0)}{c(t_0, t_0)} [x_0 - m(t_0)] \right]^2}{2 U(t, t_0)} \right\}}{\sqrt{2\pi U(t, t_0)}}.$$

Let us now analyze the stationary case. If  $X(t)$  is stationary  $E[X(t)] = m$ , the covariance is  $c(t - t')$  and the function  $U(t, t_0)$  defined in (4.7) reads:

$$(4.9) \quad U(t, t_0) = c(0) \left[ 1 - \frac{c^2(t - t_0)}{c^2(0)} \right] \equiv U(t - t_0).$$

Furthermore, the conditional density (4.8) becomes

$$(4.10) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = \frac{\exp \left\{ - \frac{\left[ x - m - \frac{c(t-t_0)}{c(0)}(x_0 - m) \right]^2}{2U(t-t_0)} \right\}}{\sqrt{2\pi U(t-t_0)}}.$$

We shall now show that the pdf (4.10) satisfies the following equation:

$$(4.11) \quad \frac{\partial f_X}{\partial t} = - \left[ \frac{x_0 - m}{c(0)} \frac{d}{dt} c(t - t_0) \right] \frac{\partial f_X}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} U(t - t_0) \frac{\partial^2 f_X}{\partial x^2}.$$

To this purpose we notice that

(4.12a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_X}{\partial t} = f_X \left\{ - \frac{\frac{\partial}{\partial t} U(t - t_0)}{2U(t - t_0)} \right. \\ \left. + \frac{\left[ x - m - \frac{c(t-t_0)}{c(0)}(x_0 - m) \right]}{U(t - t_0)} \left[ \frac{x_0 - m}{c(0)} \frac{\partial}{\partial t} c(t - t_0) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2U^2(t - t_0)} \left[ x - m - \frac{c(t - t_0)}{c(0)}(x_0 - m) \right]^2 \frac{\partial}{\partial t} U(t - t_0) \right\}, \end{aligned}$$

$$(4.12b) \quad \frac{\partial f_X}{\partial x} = f_X \left\{ - \frac{1}{U(t - t_0)} \left[ x - m - \frac{c(t - t_0)}{c(0)}(x_0 - m) \right] \right\},$$

$$(4.12c) \quad \frac{\partial^2 f_X}{\partial x^2} = f_X \left\{ \frac{\left[ x - m - \frac{c(t-t_0)}{c(0)}(x_0 - m) \right]^2}{U^2(t - t_0)} - \frac{1}{U(t - t_0)} \right\}.$$

Making use of (4.12) it is straightforward to prove that (4.11) is satisfied.

We remark that, because of (4.9), equation (4.11) can be given in the following form:

$$(4.13) \quad \frac{\partial f_X}{\partial t} + \left[ \frac{x_0 - m}{c(0)} \frac{d}{dt} c(t - t_0) \right] \frac{\partial f_X}{\partial x} + \left[ \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \frac{d}{dt} c(t - t_0) \right] \frac{\partial^2 f_X}{\partial x^2} = 0.$$

It is interesting to remark that the conditional pdf given by (4.10) exhibits the following symmetry property:

$$(4.14) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = f_X[\psi(x, t - t_0), t | \psi(x_0, 0), t_0],$$

where

$$(4.15) \quad \psi(x, \vartheta) = \alpha(x - m) + m + \beta \frac{c(\vartheta)}{c(0)} \quad (\alpha = \pm 1, \beta \in \mathbb{R}).$$

Indeed from (4.10) and (4.15) one has

$$\begin{aligned} f_X[\psi(x, t - t_0), t | \psi(x_0, 0), t_0] &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi U(t - t_0)}} \exp \left\{ - \frac{\left[ \psi(x, t - t_0) - m - \frac{c(t - t_0)}{c(0)} [\psi(x_0, 0) - m] \right]^2}{2U(t - t_0)} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi U(t - t_0)}} \exp \left\{ - \frac{1}{2U(t - t_0)} \left[ \alpha(x - m) + m + \beta \frac{c(t - t_0)}{c(0)} - m \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \times [\alpha(x_0 - m) + m + \beta - m] \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi U(t - t_0)}} \exp \left\{ - \frac{1}{2U(t - t_0)} \left[ x - m - \frac{c(t - t_0)}{c(0)} (x_0 - m) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

The right hand side of last equality gives  $f_X(x, t | x_0, t_0)$  which completes the proof.

The conditional pdf (4.10) also satisfies the following more general symmetry property:

$$(4.16) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = \varphi(x, t - t_0 | x_0) f_X[\psi(x, t - t_0), t | \psi(x_0, 0), t_0],$$

where

$$(4.17) \quad \psi(x, \vartheta) = \alpha(x - m) + m + \beta(\vartheta) \quad (\alpha = \pm 1)$$

with  $\beta(\vartheta)$  an arbitrary function and where we have set:

$$(4.18) \quad \varphi(x, t - t_0 | x_0) = \exp \left\{ \frac{1}{U(t - t_0)} \left[ \beta(t - t_0) - \beta(0) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right] \right. \\ \left. \times \left[ \alpha \left( x - m - \frac{(x_0 - m)c(t - t_0)}{c(0)} \right) + \frac{1}{2} \left( \beta(t - t_0) - \frac{\beta(0)c(t - t_0)}{c(0)} \right) \right] \right\}.$$

We remark that if one takes  $\beta(t - t_0) = \beta(0) c(t - t_0)/c(0)$ , then  $\varphi(x, t - t_0 | x_0) = 1$ ; moreover (4.17) identifies with (4.15), and hence symmetry (4.14) is recovered. Let us now prove that (4.16) holds. To this end, we point out that from (4.10), (4.17) and (4.18) one has:

$$\begin{aligned} & \varphi(x, t - t_0 | x_0) f_X[\psi(x, t - t_0), t | \psi(x_0, 0), t_0] \\ &= \exp \left\{ \frac{\left[ \beta(t - t_0) - \beta(0) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right]}{U(t - t_0)} \left[ \alpha \left( x - m - (x_0 - m) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \beta(t - t_0) - \beta(0) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right) \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi U(t - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2U(t - t_0)} \right. \\ & \left. \times \left[ \alpha(x - m) + m + \beta(t - t_0) - m \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \left( \alpha(x_0 - m) + m + \beta(0) - m \right) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi U(t - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2U(t - t_0)} \left[ -2\alpha \left( x - m - (x_0 - m) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \beta(t - t_0) - \beta(0) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right) - \left( \beta(t - t_0) - \beta(0) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( x - m - (x_0 - m) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right)^2 + 2\alpha \left( x - m - (x_0 - m) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \beta(t - t_0) - \beta(0) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right) + \left( \beta(t - t_0) - \beta(0) \frac{c(t - t_0)}{c(0)} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi U(t - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2U(t - t_0)} \left[ x - m - \frac{c(t - t_0)}{c(0)} (x_0 - m) \right]^2 \right\} \\ &\equiv f_X(x, t | x_0, t_0). \end{aligned}$$

For  $\alpha = -1$  the function  $\psi$  given in (4.17) is such that

$$(4.19) \quad \psi[S(t), t] = S(t)$$

iff

$$(4.20) \quad S(t) = m + \frac{\beta(t)}{2}.$$

The symmetry properties (4.14) and (4.16) can be useful for the description of  $X(t)$  and, in particular, for the study of FCT problems when the process under consideration is both normal and Markov. It should be pointed out that the specific case of diffusion processes the role of symmetries of the transition pdf's has been thoroughly investigated in Buonocore et al. (1990a) and Giorno et al. (1989a).

Use of stochastic differential equation for building models of physical, biological or engineering systems subject to random perturbations is too well known to be recalled here. Hence, we limit ourselves to a few remarks for the case of systems whose time evolution in the absence of "noise" is described by the differential equation

$$(4.21) \quad \frac{dX}{dt} = f(X), \quad X(0) = x_0.$$

The effect of the perturbations that act on the system is customarily included in an extra-term on the right hand side of equation (4.21). Assuming that the effect of such perturbations is in general dependent on the state of the system, equation (4.21) is substituted by the following one:

$$(4.22) \quad \frac{dX}{dt} = f(X) + g(X) \Lambda(t), \quad P\{X(0) = x_0\} = 1,$$

where  $\Lambda(t)$  is the unitary ( $\sigma^2 = 1$ ) white noise, i.e. a stationary normal process with zero mean and covariance  $c(t, t') = \sigma^2 \delta(t - t')$  ( $\sigma > 0$ ). In (4.22) the functions  $f$  and  $g$  are assumed to be given. In the limit when  $\sigma \downarrow 0$ , equation (4.22) yields equation (4.21). In other words, under the above limit random perturbations are cancelled out so that the random process defined by (4.22) becomes the deterministic process which is the solution of (4.21).

We now go back to equation (4.22) and replace  $\Lambda(t)$  by a general normal process  $Y(t)$  to obtain:

$$(4.23) \quad \frac{dX}{dt} = f(X) + g(X)Y(t), \quad P\{X(0) = x_0\} = 1.$$

For the considerations to come it is convenient to take  $f(X) = 0$  and  $g(X) = 1$  in (4.23). Note that this last assumption is actually unnecessary since by means of transformation

$$Z(t) = \int^{X(t)} \frac{1}{g(z)} dz$$

one can always switch to the case when  $Y(t)$  is purely additive. We shall thus assume that the stochastic process  $\{X(t), t \geq t_0\}$  is obtained from  $Y(t)$  by

$$(4.24) \quad \frac{dX}{dt} = Y(t) \quad (t > t_0), \quad P\{X(t_0) = x_0\} = 1.$$

In the sequel, we shall denote by  $m_Y(t) \equiv E[Y(t)]$  the mean of  $Y(t)$  and by  $c_Y(t, t') \equiv E[Y(t)Y(t')] - m_Y(t)m_Y(t')$  the covariance of  $Y(t)$ .

Due to (4.24), the process  $X(t)$  is related to  $Y(t)$  by the following linear relation:

$$(4.25) \quad X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t Y(\tau) d\tau.$$

Hence,  $X(t)$  is itself normal. Let us therefore calculate the mean  $m_X(t)$  and covariance  $c_X(t, t')$  of  $X(t)$  in terms of the mean  $m_Y(t)$  and covariance  $c_Y(t, t')$  of  $Y(t)$ . It is straightforward to prove that

$$(4.26) \quad m_X(t) = E[X(t)] = x_0 + \int_{t_0}^t E[Y(\tau)] d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t m_Y(\tau) d\tau.$$

Furthermore, one has:

$$c_X(t, t') = \text{cov}[X(t), X(t')] = E[X(t)X(t')] - m_X(t)m_X(t')$$

$$\begin{aligned}
&= E\left\{\left[x_0 + \int_{t_0}^t Y(\tau) d\tau\right]\left[x_0 + \int_{t_0}^{t'} Y(\tau') d\tau'\right]\right\} \\
&\quad - \left[x_0 + \int_{t_0}^t m_Y(\tau) d\tau\right]\left[x_0 + \int_{t_0}^{t'} m_Y(\tau') d\tau'\right] \\
&= x_0^2 + x_0 \left[ \int_{t_0}^t m_Y(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t'} m_Y(\tau') d\tau' \right] \\
&\quad + \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{t'} E[X(\tau)X(\tau')] d\tau' \\
&\quad - x_0^2 - x_0 \left[ \int_{t_0}^t m_Y(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t'} m_Y(\tau') d\tau' \right] \\
&\quad - \int_{t_0}^t m_Y(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t'} m_Y(\tau') d\tau' \\
&= \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{t'} \{E[X(\tau)X(\tau')] - m_Y(\tau) m_Y(\tau')\} d\tau' \\
(4.27) \quad &= \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{t'} c_Y(\tau, \tau') d\tau'.
\end{aligned}$$

In the special case when  $Y(t)$  is the white noise, i.e. the stationary process having zero mean and covariance  $c_Y(t, t') = \delta(t - t')$ , then the process  $X(t)$  obtained from  $Y(t)$  via (4.25) is normal with mean

$$(4.28) \quad m_X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t m_Y(\tau) d\tau = x_0.$$

and covariance

$$\begin{aligned}
c_X(t, t') &= \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{t'} \delta(\tau - \tau') d\tau' = \int_{t_0}^{\min(t, t')} d\tau \int_{t_0}^{\min(t, t')} \delta(\tau - \tau') d\tau' \\
&\quad + \int_{t_0}^{\min(t, t')} d\tau \int_{t_0}^{\max(t, t')} \delta(\tau - \tau') d\tau' \\
(4.29) \quad &= \int_{t_0}^{\min(t, t')} d\tau = \min(t, t') - t_0.
\end{aligned}$$

Note that the process  $X(t)$  thus obtained is non stationary even though  $Y(t)$  is such. Indeed, in general an integral of the type

$$\int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} c_Y(\tau - \tau') d\tau'$$

does not yield a function depending only on the difference  $t - t'$ .

The process  $X(t)$  is recognized to be the standard Wiener process, i.e. the integrated white noise. Making use of (4.28) and (4.29), starting from (4.8) one easily obtains the conditional pdf

$$(4.30) \quad f_X(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}\right\}.$$

Coming back to the general case, we now refer to the process

$$(4.31) \quad X(t) - X(\tau) \equiv \int_{\tau}^t Y(\vartheta) d\vartheta \quad (t > \tau \geq t_0);$$

this is normal with mean

$$(4.32) \quad E[X(t) - X(\tau)] = \int_{\tau}^t m_Y(\vartheta) d\vartheta$$

and variance

$$\begin{aligned} V(t, \tau) &\equiv \text{var}[X(t) - X(\tau)] = \text{var}[X(t)] + \text{var}[X(\tau)] - 2\text{cov}[X(t), X(\tau)] \\ &= \int_{t_0}^t d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' + \int_{t_0}^{\tau} d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' \\ &\quad - 2 \int_{t_0}^{\tau} d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' \\ &= \int_{t_0}^{\tau} d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' + \int_{t_0}^{\tau} d\vartheta \int_{\tau}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' \\ &\quad + \int_{\tau}^t d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' + \int_{\tau}^t d\vartheta \int_{\tau}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' \\ &\quad + \int_{t_0}^{\tau} d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' - 2 \int_{t_0}^{\tau} d\vartheta \int_{t_0}^{\vartheta} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' \end{aligned}$$

$$(4.33) \quad -2 \int_{\tau}^t d\vartheta \int_{t_0}^{\tau} c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta' \\ = \int_{\tau}^t d\vartheta \int_{\tau}^t c_Y(\vartheta, \vartheta') d\vartheta'.$$

The conditional pdf is then

$$(4.34) \quad f_X(x, t | z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t, \tau)}} \exp\left\{-\frac{(x-z)^2}{2V(t, \tau)}\right\}.$$

Let us now refer to a stationary normal process  $X(t)$  and let us take  $t_0 = 0$  as the initial time. Let us further assume that  $X(t)$  has zero mean. Due to (4.9), the conditional pdf is then

$$(4.35) \quad f_X(x, t | x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi U(t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2U(t)} \left[x - \frac{\gamma(t)}{\gamma(0)} x_0\right]^2\right\}$$

where  $U(t) = \gamma(0)[1 - \gamma^2(t)/\gamma^2(0)]$  and where  $\gamma(t) = E[X(t+\tau)X(\tau)]$  is the correlation function of the process. Let us remark that if the correlation function  $\gamma(t)$  takes the following form

$$(4.36) \quad \gamma(t) = \gamma(0) e^{-t/\vartheta} + \varphi(t) o[\gamma(0)],$$

then one has:

$$(4.37) \quad \lim_{\gamma(0) \downarrow 0} P\{X(t) = x_0 e^{-t/\vartheta}\} = 1.$$

Namely, if the variance of the process  $X(t)$  goes to zero, then  $X(t)$  becomes the degenerate process  $X(t) = x_0 e^{-t/\vartheta}$  with probability one. Hence, as  $\gamma(0) \downarrow 0$  the process  $X(t)$  behaves as the mean value of an Ornstein-Uhlenbeck (OU) process having drift  $A_1(x) = -x/\vartheta$ . Notice that when choosing  $\gamma(t)$  as in (4.36) it is convenient to secure that  $\gamma(t)$  is differentiable at  $t = 0$ , which is only possible for particular choices of  $\varphi(t)$ .

We have already stressed that models of dynamical systems arising in a variety of different fields can be constructed by means of stochastic differential equations involving the white noise. Among these an important

role is played by the OU process, often invoked for instance to construct models of generation of action potentials by single neurons (see, for instance, Ricciardi et al. 1999, Ricciardi and Lansky 2002, Buonocore et al. 2008, and references therein). Since the correlation function of the OU process is exponential with a cusp in the origin, there it does not admit derivative. Hence, the sample paths of the process are not differentiable, which is a manifestation of the diffusion nature of the process. One thus expects that the process with differentiable sample paths may be obtained by a smoothing of the OU process. Thus doing the new process retains its normal nature without differing too much from the original OU process.

In conclusion, the OU process we started from can be replaced by a stationary normal process with differentiable sample paths providing the exponential correlation function is substituted by a function possessing a derivative in the origin but not too different from the exponential function.

## 5 - A SERIES EXPANSION FOR FCT DENSITY

We shall now undertake the study of the FCT problem through a continuous and differentiable boundary  $S(t)$  for a normal process  $X(t)$  ( $t \geq 0$ ) conditioned by  $X(0) = x_0$ . We point out that an interesting approach, though along lines totally different from those discussed hereafter, can be found in Durbin (1985).

Let us assume that  $X(t)$  is stationary, with zero mean and covariance  $E[X(t)X(t')] = \gamma(t-t')$ , with  $\gamma(0) = 1$ . We shall also assume that  $X(t)$  is m.s. differentiable, and hence we shall require that  $\dot{\gamma}(0) \equiv [d^2\gamma(t)/dt^2]_{t=0}$  exists and is finite. We shall take  $S(0) > x_0$  and thus consider the upward FCT. The case  $S(0) < x_0$  can indeed be treated similarly.

Under the above assumptions a series expansion of the FCT density  $g[S(t), t | x_0]$  can be obtained. To this purpose let us define the following event:

$A(t; dt)$ : “ $X(t)$  crosses  $S(t)$  from below in the infinitesimal time interval  $(t, t + dt)$ ”.

Let us now denote by  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  arbitrary instants. The following proposition holds:

**Proposition 5.1** Let

(5.1)

$$W_n(t_1, t_2, \dots, t_n | x_0) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \\ = P\{A(t_1; dt_1) \cap A(t_2; dt_2) \cap \cdots \cap A(t_n; dt_n) | X(0) = x_0\}, (n = 1, 2, \dots)$$

so that  $W_n(t_1, t_2, \dots, t_n | x_0) dt_1 dt_2 \cdots dt_n$  is the joint probability that  $X(t)$  crosses  $S(t)$  from below in the intervals  $(t_1, t_1 + dt_1)$ ,  $(t_2, t_2 + dt_2)$ ,  $\dots$ ,  $(t_n, t_n + dt_n)$ , given that  $X(0) = x_0$ .

One then has:

$$W_n(t_1, t_2, \dots, t_n | x_0) \\ = \int_{\dot{S}_1}^{+\infty} d\dot{x}_1 \int_{\dot{S}_2}^{+\infty} d\dot{x}_2 \cdots \\ (5.2) \quad \cdots \int_{\dot{S}_n}^{+\infty} d\dot{x}_n \prod_{i=1}^n (\dot{x}_i - \dot{S}_i) p_{2n}(S_1, S_2, \dots, S_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n | x_0),$$

where we have set  $S_i = S(t_i)$  and  $\dot{S}_i = [dS(t)/dt]_{t=t_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), with  $p_{2n}$  given by (3.26).

**Proof** In order for an upcrossing to take place in  $(t_i, t_i + dt_i)$  the following conditions must be satisfied:

$$(5.3a) \quad X(t_i) < S(t_i),$$

$$(5.3b) \quad X(t_i + dt_i) > S(t_i + dt_i).$$

Since, by assumption,  $X(t)$  is m.s. differentiable,  $\dot{X}(t)$  exists and represents the velocity of  $X(t)$ . Hence,

$$(5.4) \quad X(t_i + dt_i) = X(t_i) + \dot{X}(t_i) dt_i.$$

On the other hand, since  $S(t)$  has been assumed to be differentiable one also has

$$(5.5) \quad S(t_i + dt_i) = S(t_i) + \dot{S}(t_i) dt_i.$$

From (5.3b), (5.4) and (5.5) one then obtains

$$X(t_i + dt_i) > S(t_i + dt_i) \Leftrightarrow X(t_i) - S(t_i) + [\dot{X}(t_i) - \dot{S}(t_i)] dt_i > 0.$$

Therefore one also has:

$$(5.6) \quad X(t_i) > S(t_i) - [\dot{X}(t_i) - \dot{S}(t_i)] dt_i \equiv V_i.$$

By imposing that (5.3a) is satisfied, from (5.6) one finally obtains

$$(5.7) \quad \dot{X}(t_i) > \dot{S}(t_i).$$

In conclusion, to have an upcrossing in  $(t_i, t_i + dt_i)$  it must be

$$(5.8) \quad S(t_i) > X(t_i) > V_i, \quad \dot{X}(t_i) > \dot{S}(t_i).$$

The probability (5.1) can thus be expressed as follows:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} &W_n(t_1, t_2, \dots, t_n | x_0) dt_1 dt_2 \dots dt_n = \\ &\int_{V_1}^{S_1} dx_1 \int_{V_2}^{S_2} dx_2 \dots \int_{V_n}^{S_n} dx_n \int_{\dot{S}_1}^{+\infty} d\dot{x}_1 \int_{\dot{S}_2}^{+\infty} d\dot{x}_2 \dots \\ &\dots \int_{\dot{S}_n}^{+\infty} p_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n | x_0) d\dot{x}_n. \end{aligned}$$

Making use of the mean-value theorem and of (5.6), we have:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} &\int_{V_i}^{S_i} p_{2n}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n | x_0) dx_i \\ &\quad \simeq dt_i (\dot{x}_i - \dot{S}_i) p_{2n}(x_1, \dots, S_i, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n | x_0). \end{aligned}$$

Substituting (5.10) in the right hand side of (5.9), equation (5.2) finally follows.  $\diamond$

We can now prove the following theorem.

**Theorem 5.1** The FCT pdf of  $X(t)$  through  $S(t)$  can be expressed as follows:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} g[S(t), t | x_0] &= W_1(t | x_0) - \int_0^t dt_1 W_2(t_1, t | x_0) \\ &+ \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 W_3(t_1, t_2, t | x_0) - \dots \\ &+ (-1)^n \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^t dt_n W_{n+1}(t_1, \dots, t_n, t | x_0) + \dots \end{aligned}$$

**Proof** For each integer  $n$ , set  $\Delta t = t/n$  and consider the partition of  $[0, t]$  by means of instants  $t_i = i\Delta t$ , ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Further, for each  $\tau > 0$  define:

$$B(\tau; \Delta t): "X(t) \text{ crosses } S(t) \text{ from below in the} \\ \text{time interval } (\tau, \tau + \Delta t)".$$

Then, the probability that the first passage of  $X(t)$  through  $S(t)$  from below occurs in  $(t, t + \Delta t)$  is given by

(5.12)

$$g[S(t), t | x_0] \Delta t = P\{B(t; \Delta t) | X(0) = x_0\} \\ - P\left\{\left[\bigcup_{i=0}^{n-1} B(t_i; \Delta t)\right] \cap B(t; \Delta t) \mid X(0) = x_0\right\} + o(\Delta t),$$

where  $o(\Delta t)$  accounts for the probability of multiple crossings from below of any interval of the partitions. Making use of the inclusion-exclusion theorem in the second term of the right-hand-side of (5.12) one thus obtains

(5.13)

$$g[S(t), t | x_0] \Delta t = P\{B(t; \Delta t) | X(0) = x_0\} \\ - \sum_{i=0}^{n-1} P\{B(t_i; \Delta t) \cap B(t; \Delta t) | X(0) = x_0\} \\ + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} P\{B(t_i; \Delta t) \cap B(t_j; \Delta t) \cap B(t; \Delta t) | X(0) = x_0\} \\ - \sum_{i=0}^{n-3} \sum_{j=i+1}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} P\{B(t_i; \Delta t) \cap B(t_j; \Delta t) \cap B(t_k; \Delta t) \cap B(t; \Delta t) | X(0) = x_0\} \\ + \dots \\ + (-1)^n P\{B(t_0; \Delta t) \cap B(t_1; \Delta t) \cap \dots \cap B(t_{n-1}; \Delta t) \cap B(t; \Delta t) | X(0) = x_0\} \\ + o(\Delta t).$$

The proof now follows after dividing by  $\Delta t$  both size of (5.13) and taking the limit for  $n \rightarrow \infty$  in the right hand side. Indeed, recalling the definition of  $A(\tau; dt)$ , for large  $n$  and for  $0 \leq k \leq n-1$ , one obtains

$$P\{B(t_{i_1}; \Delta t) \cap B(t_{i_2}; \Delta t) \cap \dots \cap B(t_{i_k}; \Delta t) \cap B(t; \Delta t) | X(0) = x_0\} \\ = P\{A(t_{i_1}; dt) \cap A(t_{i_2}; dt) \cap \dots \cap A(t_{i_k}; dt) \cap A(t; dt) | X(0) = x_0\} + o(\Delta t)$$

which completes the proof due to (5.1).  $\diamond$

**Remark 5.1** Let  $\alpha_k$  denote the partial sum of order  $k$  of series (5.11). Then, for each  $t > 0$  one has

$$\alpha_{2r-1} - \alpha_{2r} > \alpha_{2r+1} - \alpha_{2r+2} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

**Proof** This follows directly from Leibnitz criteria of convergence of alternate terms series.  $\diamond$

Hence, the partial sums  $\alpha_{2r}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) of even order give a lower bound to  $g$ , which progressively approach  $g$  as  $r$  grows. Similarly, the partial sums  $\alpha_{2r+1}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) of odd order provide an upper bound to  $g$ . Estimates of the FCT densities for stationary normal processes have been carried out by Ricciardi and Sato (1986) by evaluating partial sums of the series on the right hand side of (5.11).

The evaluation of the partial sums  $\alpha_k$  is very cumbersome because of the complexity of the functions  $W_n$  and of their integrals. In Ricciardi and Sato (1983) the explicit expression of functions  $W_1$  and  $W_2$  have been given. As easily seen, even for these simplest cases the analytical result requires a large amount of computations. In Ricciardi and Sato (1986) the functions  $W_1$  and  $W_2$  have been determined for a normal process with a Butterworth-type covariance function and constant boundaries. While referring to Ricciardi and Sato (1983) and Ricciardi and Sato (1986) for the details of the computations, here we limit ourselves to depict the behavior of the quantities

$$\alpha_1 \equiv W_1(t|x_0), \quad \alpha_2 \equiv W_2(t|x_0) - \int_0^t W_2(t_1, t|x_0) dt_1$$

for a stationary normal process with a Butterworth-type covariance function of the second order (B-2), i.e.:

$$(5.14) \quad \gamma(\tau) = \sqrt{2} \exp \left\{ -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \tau \right\} \sin \left\{ \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \tau + \frac{\pi}{4} \right\} \quad (\tau \geq 0),$$

and for the constant threshold  $S = 1$ , assuming  $x_0 = 0$ , namely a null initial state.

From Figure 1 we see that  $W_1(t|x_0)$  is a good approximation of  $g(t)$  for small values of  $t$ . For large values of  $t$  the function  $g(t)$  stays in between

$\alpha_1$  and  $\alpha_2$ . To obtain more accurate bounds and to gather information on the tail of  $g(t)$ , the evaluation of higher order partial sums of series (5.11) would be necessary. It is not difficult to realize that the series expansion (5.11) of  $g(t)$  is hardly suitable for computational purposes because of the increasing complexity of its terms. In the next Section a different approach to the FCT problem will be discussed, which is based on the simulation of the sample paths of the normal process.

## 6. A SIMULATION PROCEDURE FOR STATIONARY NORMAL PROCESSES

Let us consider a stationary normal process  $X(t)$  with zero mean and correlation function  $\gamma(t)$ . The spectral density  $\Gamma(\omega)$  is defined as the Fourier transform of the correlation function  $\gamma(t)$ :

$$(6.1) \quad \Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-i\omega t} dt.$$

The inverse Fourier transform then provides the correlation function if the spectral density is known. In this Section we shall outline a method, essentially proposed by J.N. Franklin (Franklin, 1965), to simulate sample paths of a stationary normal process originating from a given state  $X(0)$ . In the sequel we shall assume  $X(0) = 0$ ; furthermore, we shall take  $\gamma(0) = 1$ , implying that the variance of the process is unity. As seen in Section 4, the pdf  $f[X(t) | X(0) = 0]$  is normal with zero mean and variance  $1 - \gamma^2(t)$ :

$$(6.2) \quad f(x, t | 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[1 - \gamma^2(t)]}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2[1 - \gamma^2(t)]}\right\}.$$

Hereafter we shall refer to various functions that we shall interpret as covariance functions. Any such function  $\gamma(t)$  will then have to satisfy the following condition:

$$(6.3) \quad \gamma(0) = 1, \quad |\gamma(t)| < 1 \quad \text{per } t \neq 0.$$

Let us now consider a linear filter whose output  $X(t)$  is given by

$$(6.4) \quad X(t) = \int_{-\infty}^t g(t-s) W(s) ds = \int_0^{\infty} g(s) W(t-s) ds.$$

Equation (6.4) can be viewed as a transformation induced by the convolution of the input signal  $W$  with the characteristic function of the filter, e.g. its impulse response. The output signal  $X(t)$  at the current time  $t$  is thus the sum of the input signals weighted by  $g$  up to time  $t$ . As is well known,  $g$  is said to be the impulse response because if an impulse signal  $W(s) = \delta(s)$  (where  $\delta$  is the Dirac delta function) is the input to the system described by (6.4), then the output is  $g(t)$ :

$$(6.5) \quad X(t) = \int_0^\infty g(s) \delta(t-s) ds = g(t).$$

Of course,  $g(s) = 0$  for  $s < 0$ , because for physically realizable systems, such as those that we refer to, the output at any given time cannot depend on inputs at previous times.

Since the convolution operation is linear, if in (6.4) the input signal is stationary and normal then also the output  $X(t)$  is stationary and normal. Moreover, if  $g$  is a real function such are also  $X(t)$  and  $W(t)$ .

Let us denote by  $\Gamma_W(\omega)$  and  $\Gamma_X(\omega)$  the spectral densities of input  $W(t)$  and output  $X(t)$  respectively, and let us denote by  $G(\omega)$  the Fourier transform of  $g(t)$ . One can then prove that the following relation holds:

$$(6.6) \quad \Gamma_X(\omega) = |G(\omega)|^2 \Gamma_W(\omega).$$

Indeed, recalling (3.20) and (6.1) one obtains:

$$\Gamma_X(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} \gamma_X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} E[X(t)X(t-\tau)] d\tau,$$

where by  $\gamma_X(t)$  we have denoted the covariance of  $X(t)$ . Making use of (6.4) one then has:

$$\begin{aligned} \Gamma_X(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} E\left[\int_0^\infty g(s) W(t-s) ds \int_0^\infty g(\sigma) W(t-\tau-\sigma) d\sigma\right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} d\tau \int_0^\infty g(s) ds \int_0^\infty g(\sigma) E[W(t-s)W(t-\tau-\sigma)] d\sigma. \end{aligned}$$

Making then use of (3.20) one finds:

$$\Gamma_X(\omega) = \int_0^\infty g(s) ds \int_0^\infty g(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} \gamma_W(\tau + \sigma - s) d\tau,$$

where in the last integral on the right hand side  $\gamma_W$  denotes the covariance of the process  $W$ . Finally, making use of the transformation  $\tau = u - \sigma + s$  and recalling (6.1) we obtain

$$\begin{aligned}\Gamma_X(\omega) &= \int_0^\infty e^{-i\omega s} g(s) ds \int_0^\infty e^{i\omega\sigma} g(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega u} \gamma_W(u) du \\ &= \int_0^\infty e^{-i\omega s} g(s) ds \int_0^\infty \overline{e^{-i\omega\sigma} g(\sigma)} d\sigma \Gamma_W(\omega) \\ &= \int_0^\infty e^{-i\omega s} g(s) ds \overline{\int_0^\infty e^{-i\omega\sigma} g(\sigma) d\sigma} \Gamma_W(\omega) \\ &= G(\omega) \overline{G(\omega)} \Gamma_W(\omega) = |G(\omega)|^2 \Gamma_W(\omega).\end{aligned}$$

Equation (6.6) is suggestive of a method to construct a normal process  $X(t)$  having a preassigned spectral density  $\Gamma_X(\omega) \equiv \Gamma(\omega)$ . It is indeed sufficient to make use of (6.4) for the case when the input signal  $W(t)$  is a normal process having spectral density  $\Gamma_W(\omega) \equiv 1$ , and then select  $g(t)$  in such a way that its Fourier transform  $G(\omega)$  satisfies  $|G(\omega)|^2 = \Gamma(\omega)$ . Hence, substituting  $\Gamma_W(\omega) = 1$  and  $|G(\omega)|^2 = \Gamma(\omega)$  in (6.6),  $\Gamma_X(\omega) = \Gamma(\omega)$  is immediately obtained.

By such a procedure we have therefore obtained a process  $X(t)$  that is normal due to the linearity of (6.4). Moreover, its spectral density  $\Gamma_X(\omega)$  is equal to the spectral density  $\Gamma(\omega)$  corresponding to the preassigned covariance  $\gamma(t)$ .

The process  $W(t)$  whose spectral density has been assumed to be unit, is a zero-mean stationary normal process. Furthermore, its covariance  $\gamma(\tau)$  is the Dirac-delta function  $\delta(\tau)$ , as is immediately seen from the following relation:

$$(6.7) \quad \Gamma_W(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} \gamma(\tau) d\tau = 1.$$

The process  $W(t)$ , that henceforth we shall denote by  $\Lambda(t)$ , identifies with the white noise. Hence, it is an ideal process, which is not physically realizable because its variance is infinity at all instants:

$$E[\Lambda^2(t)] = \gamma(0) = \delta(0) = \infty.$$

Furthermore, no matter how close ( $t_1 \neq t_2$ ) are the instants  $t_1$  and  $t_2$ , the random variables  $\Lambda(t_1)$  and  $\Lambda(t_2)$  are uncorrelated.

We are now left with the problem of determining the Fourier transform  $G(\omega)$  such that  $|G(\omega)|^2 = \Gamma(\omega)$ . This can be done by making use of a result due to Davenport and Root (1958). Namely, if  $\Gamma(\omega)$  is a rational function satisfying the condition:

$$(6.8) \quad 0 \leq \Gamma(\omega) \leq \infty, \quad \Gamma(\omega) = \Gamma(-\omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \Gamma(\omega) = 0,$$

then it can be written in the form:

$$(6.9) \quad \Gamma(\omega) = \left| \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2, \quad (\omega \text{ real}),$$

where  $P(z)$  and  $Q(z)$  are polynomials with real coefficients such that the degree of  $P$  is less than the degree of  $Q$  and with the zeroes of  $Q(z)$  laying in the complex half-plane  $\Re(z) < 0$ . It is thus evident that if we take

$$(6.10) \quad G(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)},$$

the relation  $\Gamma(\omega) = |G(\omega)|^2$  immediately follows. Substituting (6.10) in (6.6) we thus obtain:

$$(6.11) \quad \Gamma_X(\omega) = \left| \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2 \Gamma_W(\omega).$$

If we now denote by  $D$  the operator  $d/dt$ , recalling that we have identified the input  $W(t)$  with the white noise  $\Lambda(t)$ , from (6.11) we obtain (Davenport and Root (1958):

$$(6.12) \quad X(t) = \frac{P(D)}{Q(D)} \Lambda(t).$$

Equation (6.12) should be interpreted in the following way: first we solve the differential equation

$$(6.13) \quad Q(D) \phi(t) = \Lambda(t)$$

to obtain the stationary solution  $\phi(t)$ ; the required output

$$(6.14) \quad X(t) = P(D) \phi(t)$$

is then expressed as a linear combination of the derivatives of  $\phi(t)$  whose order is less than the degree of  $Q$ . Assume that  $P$  has degree  $m$  and the  $Q$  has degree  $n$ :

$$(6.15a) \quad P(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^{m-i} = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m,$$

$$(6.15b) \quad Q(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (a_0 = 1).$$

By virtue of (6.15) equations (6.13) and (6.14) become ( $n > m$ ):

$$(6.16) \quad \phi(t)^n(t) + a_1 \phi(t)^{n-1}(t) + \dots + a_n \phi(t) = \Lambda(t),$$

$$(6.17) \quad X(t) = b_0 \phi(t)^m(t) + b_1 \phi(t)^{m-1}(t) + \dots + b_m \phi(t)$$

respectively. To calculate the desired input signal  $X(t)$  it is thus necessary to calculate the derivative of  $\phi(t)$  by means of the stochastic equation (6.16).

Let us now remark that if we introduce the state vector

$$(6.18) \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \\ \vdots \\ \phi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

then equation (6.16) can be re-written in the following compact form:

$$(6.19) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = A \mathbf{v}(t) + \mathbf{y}(t).$$

Here, matrix  $A$  is in canonical form:

$$(6.20) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

and the input vector  $\mathbf{y}(t)$  is given by

$$(6.21) \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Lambda(t) \end{pmatrix}.$$

The simulation procedure aims at constructing sample paths of the process  $X(t)$  at the instants  $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$  where  $\Delta t$  is a constant positive time increment. To this purpose it is necessary to calculate the components of vector  $\mathbf{v}(t)$  at the same instants. This can be achieved by solving the system (6.19) of linear differential equations. Denoting by  $\mathbf{v}(0)$  the vector of the initial conditions, from (6.19) one obtains:

$$(6.22) \quad \mathbf{v}(t) = e^{At} \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{y}(\tau) d\tau.$$

Hence,

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}(t + \Delta t) &= e^{A(t+\Delta t)} \mathbf{v}(0) + \int_0^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{y}(\tau) d\tau \\ &= e^{A\Delta t} \left[ e^{At} \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{y}(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{y}(\tau) d\tau \\ &= e^{A\Delta t} \mathbf{v}(t) + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\tau)} \mathbf{y}(t + \tau) d\tau. \end{aligned}$$

If we set

$$(6.24) \quad \mathbf{r}(t) = \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\tau)} \mathbf{y}(t + \tau) d\tau,$$

one is led to the following relation:

$$(6.25) \quad \mathbf{v}(t + \Delta t) = e^{A\Delta t} \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t).$$

By calculating the matrix  $e^{A\Delta t}$  and the vector  $\mathbf{r}(t)$  it is possible to obtain from  $\mathbf{v}(t)$  the state vector  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ . By means of (6.25) one can then calculate by iteration the components of the state vector  $\mathbf{v}(t)$  at time  $t = k\Delta t$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

We still have to show how one can calculate the state vector  $\mathbf{v}(t)$  at initial time  $t = 0$  and how  $\mathbf{r}(t)$  it can be determined at times  $t = k\Delta t$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). However, it is first necessary to indicate how one can generate a sequence of  $n$ -dimensional normal vectors  $\mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots$  with mean equal to the null vector and covariance matrix  $M$ . This can be done by making use of a sample of progressively increasing size generated by a sequence of i.i.d. standard normal random variables  $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \tilde{\Lambda}_3, \dots$ . Setting (6.26)

$$\tilde{\Lambda}^{(0)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\Lambda}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{\Lambda}_{2n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}^{(2)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{2n+1} \\ \vdots \\ \tilde{\Lambda}_{3n} \end{pmatrix}, \dots$$

one obtains samples of independent,  $n$ -dimensional normal random variables having zero mean and covariance matrix consisting of the identity matrix. Let now us recall that a real, positive-definite symmetric square matrix  $M$  can be factorized as follows:

$$(6.27) \quad M = B B^T,$$

where  $B$  is a lower triangular matrix with positive elements on the diagonal (cf., for instance, Golub and van Loan 1983). If we then set

$$(6.28) \quad \mathbf{z}^{(i)} = B \tilde{\Lambda}^{(i)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

it turns out that vectors  $\mathbf{z}^{(i)}$  are the required vectors. Due to the linearity of the mean value operator and because of (6.27) the vectors defined by (6.28) are normal, with mean and covariance given by

$$(6.29a) \quad E[\mathbf{z}^{(i)}] = B E[\tilde{\Lambda}^{(i)}] = 0,$$

$$(6.29b) \quad E[\mathbf{z}^{(i)} (\mathbf{z}^{(i)})^T] = B E[\tilde{\Lambda}^{(i)} (\tilde{\Lambda}^{(i)})^T] B^T = B B^T = M.$$

We now calculate the state vector  $\mathbf{v}(0)$ , which is normal with zero mean and covariance matrix

$$(6.30) \quad M_{\mathbf{v}} = E[\mathbf{v}(0) \mathbf{v}^T(0)] = E[\mathbf{v}(t) \mathbf{v}^T(t)].$$

Recalling (6.18) we then find that the elements  $M_{ij}$  of  $M_{\mathbf{v}}$  are given by

$$(6.31) \quad M_{ij} = E[\phi^{(i)}(t) \phi^{(j)}(t)] \quad (i, j = 0, 1, \dots, n-1).$$

To calculate the  $M_{ij}$ 's we make use of the following formula (cfr. Franklin, 1965):

$$(6.32) \quad M_{ij} = \begin{cases} 0, & i + j \text{ odd,} \\ (-1)^{(j-i)/2} m_{(i+j)/2}, & i + j \text{ even,} \end{cases}$$

where  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  can be computed by solving the following  $n$  linear algebraic equations

$$(6.33) \quad (-1)^k \sum_{q \in I} (-1)^q a_{n-2q+k} m_q = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, n_2, \\ 1/2, & k = n_1, \end{cases}$$

with  $a_0 = 1$  and  $I = \{i \in \mathbf{Z} : k/2 \leq i \leq (n+k)/2\}$ . After the matrix  $M_{\mathbf{v}}$  has been determined, it can be factored out in the form (6.27), for instance by means of Crout's method. One then obtains:

$$(6.34) \quad M_{\mathbf{v}} = B_{\mathbf{v}} B_{\mathbf{v}}^T$$

where  $B_{\mathbf{v}}$  is a lower triangular matrix. If we then set

$$(6.35) \quad \mathbf{v}(0) = B_{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(0)},$$

the vector  $\mathbf{v}(0)$  thus obtained exhibits the desired features, i.e. is normal, with zero mean and covariance matrix  $M_{\mathbf{v}}$ . Therefore, we now dispose of the initial condition to be associated to equation (6.25). Let us now show how vector  $\mathbf{r}(t)$  can be calculated at times  $t = k\Delta t$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). First of all one can easily see that  $\mathbf{v}(t)$  and  $\mathbf{r}(t)$ , given by (6.22) and (6.24) respectively, are uncorrelated. Indeed, one has

$$(6.36) \quad \begin{aligned} E[\mathbf{r}(t) \mathbf{v}^T(t)] &= \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} E[\mathbf{y}(t + \tau) \mathbf{v}^T(0)] (e^{A\tau})^T d\tau \\ &+ \int_0^{\delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} d\tau \int_0^t E[\mathbf{y}(t + \tau) \mathbf{y}^T(\sigma)] (e^{A(t - \sigma)})^T d\sigma. \end{aligned}$$

Since

$$(6.37) \quad E[\mathbf{y}(t+\tau) \mathbf{v}^T(0)] = 0 \quad (t+\tau > 0)$$

and

$$(6.38) \quad E[\mathbf{y}(t+\tau) \mathbf{y}^T(\sigma)] = C \delta(t+\tau-\sigma) \quad (t+\tau > \sigma),$$

where  $C$  is the positive semi-definite matrix

$$(6.39) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

by making use of (6.37) and (6.38) in (6.36), we find that the normal vectors  $\mathbf{r}(t)$  and  $\mathbf{v}(t)$  are uncorrelated and hence independent. Therefore,  $\mathbf{r}(t)$  can be calculated independently of  $\mathbf{v}(t)$ . To this purpose it is necessary to calculate the covariance matrix

$$(6.40) \quad M_{\mathbf{r}} = E[\mathbf{r}(t) \mathbf{r}^T(t)].$$

From (6.24) we have:

$$(6.41) \quad M_{\mathbf{r}} = \int_0^{\Delta t} d\tau_1 \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau_1)} E[\mathbf{y}(t + \tau_1) \mathbf{y}^T(t + \tau_2)] (e^{A(\Delta t - \tau_2)})^T d\tau_2.$$

Making use of (6.38), after the substitution  $s = \Delta t - \tau$  from (6.41) we obtain

$$(6.42) \quad M_{\mathbf{r}} = \int_0^{\Delta t} e^{As} C (e^{As})^T ds.$$

Let us denote by  $J(s)$  the function under the integral sign in (6.42). Then,

$$(6.43) \quad \frac{d}{ds} J(s) = A J(s) + J(s) A^T.$$

Integrating both sides with respect to  $s$  in  $[0, \Delta t]$  and recalling (6.42) we obtain

$$(6.44) \quad e^{A\Delta t} C (e^{A\Delta t})^T - C = A M_{\mathbf{r}} + M_{\mathbf{r}} A^T.$$

Since the eigenvalues of  $A$  are the roots of polynomial  $Q(z)$  and since these have negative real part, equation (6.44) admits the unique solution  $M_{\mathbf{r}}$ . To calculate such matrix one has to solve system (6.44). Indeed, denoting by  $m_{ij}$  the elements of  $M_{\mathbf{r}}$  and by  $d_{ij}$  the elements of  $e^{A\Delta t}$ , equation (6.44) can be re-written in the form of a system of  $n^2$  equations in as many unknowns:

$$(6.45) \quad \sum_{k=1}^n (a_{ik} m_{kj} + a_{jk} m_{ik}) = \begin{cases} d_{in} d_{jn}, & \text{if } i < n \text{ or } j < n, \\ d_{nn}^2 - 1, & \text{if } i = j = n. \end{cases}$$

However, due to the symmetry of  $M_{\mathbf{r}}$ , the number of equations and of unknowns reduces to  $n(n+1)/2$ . System (6.45) then becomes:

$$(6.46) \quad \sum_{k \leq j} a_{ik} m_{jk} + \sum_{k > j} a_{ik} m_{kj} + \sum_{k \leq i} a_{jk} m_{ik} + \sum_{k > i} a_{jk} m_{ki} = \begin{cases} d_{in} d_{jn}, & \text{if } i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i (j < n), \\ d_{nn}^2 - 1, & \text{if } i = j = n. \end{cases}$$

After the elements  $m_{ij}$  have been calculated,  $M_{\mathbf{r}}$  can be written in the form (6.27):

$$(6.47) \quad M_{\mathbf{r}} = B_{\mathbf{r}} B_{\mathbf{r}}^T,$$

with  $B_{\mathbf{r}}$  a lower triangular matrix. Setting then

$$(6.48) \quad \mathbf{r}(t) = B_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(k)} \quad \text{for } t = k\Delta t, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

the vector  $\mathbf{r}(t)$  is a normal sample with zero mean and covariance matrix  $M_{\mathbf{r}}$ . We can now calculate the components of the state vector  $\mathbf{v}(t)$  at times  $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ . From (6.25), (6.35) and (6.48) we obtain the initial condition and the iteration law for the computation of  $\mathbf{v}(t)$ :

$$(6.49a) \quad \mathbf{v}(0) = B_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(0)},$$

$$(6.49b) \quad \mathbf{v}[(k+1)\Delta t] = e^{A\Delta t} \mathbf{v}(k\Delta t) + B_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

Finally, recalling (6.17) and (6.18) the sample path of the process  $X(t)$  can be obtained as linear combination of the components  $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$  of vector  $\mathbf{v}(t)$  as follows:

$$(6.50) \quad X(t) = b_0 v_{m+1}(t) + b_1 v_m(t) + \dots + b_m v_1(t) \quad \text{when } t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$$

Whenever it is required that  $X(t)$  originates at a given state  $X(0) = x_0$ , it is sufficient to calculate  $m$  out of the  $m + 1$  unknowns that appeared on the right hand side of (6.50) written for  $t = 0$ . The  $(m + 1)$ -th component of  $\mathbf{v}(0)$  can be obtained by imposing that the left hand side of (6.50) is changed to  $x_0$ . Hence, one can for instance first calculate  $v_1(0), v_2(0), \dots, v_m(0)$  from (6.49a) and then arise to  $v_{m+1}(0)$  via (6.50):

$$(6.51) \quad v_{m+1}(0) = \frac{x_0 - [b_1 v_m(0) + \dots + b_m v_1(0)]}{b_0}.$$

## 7 - COVARIANCE WITH DAMPED OSCILLATIONS

In this Section we shall implement the simulation procedure discussed in the foregoing. Let  $X(t)$  be a stationary normal process with zero mean and correlation function (Yaglom 1987)

$$(7.1) \quad \gamma(\tau) = e^{-\beta\tau} \frac{\cos(\alpha\tau - \psi)}{\cos\psi} \quad (\tau \geq 0),$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are positive real numbers and  $\psi$  is a real number such that

$$(7.2) \quad \psi \leq \arctan \frac{\beta}{\alpha}.$$

From (7.1) we see that  $\gamma(0) = 1$ . Since  $\gamma(\tau)$  is an even function, to check that  $|\gamma(\tau)| < 1$  for  $\tau \neq 0$  it is sufficient to show that

$$(7.3) \quad \left. \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau) \right|_{\tau=0^+} \leq 0.$$

Indeed one has

$$(7.4) \quad \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau) = -\frac{e^{-\beta\tau}}{\cos\psi} [\alpha \sin(\alpha\tau - \psi) + \beta \cos(\alpha\tau - \psi)] \quad (\tau \geq 0)$$

or

$$(7.5) \quad \left. \frac{d}{d\tau} \gamma(\tau) \right|_{\tau=0^+} = \frac{1}{\cos \psi} (\alpha \sin \psi - \beta \cos \psi) = \alpha \tan \psi - \beta.$$

From assumptions (7.2) it follows that (7.5) is not positive, i.e. (7.3) follows.

Let us now calculate the spectral density of  $X(t)$ . Keeping in mind that  $\gamma(\tau)$  is an even function one has

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \Gamma(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} e^{-\beta|\tau|} \frac{\cos(\alpha, |\tau| - \psi)}{\cos \psi} d\tau \\ &= \frac{2}{\cos \psi} \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) e^{-\beta\tau} \cos(\alpha\tau - \psi) d\tau, \end{aligned}$$

or

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \frac{2}{\cos \psi} \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) e^{-\beta\tau} [\cos(\alpha\tau) \cos \psi + \sin(\alpha\tau) \sin \psi] d\tau \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \cos(\omega\tau) \cos(\alpha\tau) + 2 \tan \psi \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \cos(\omega\tau) \sin(\alpha\tau). \end{aligned}$$

From this expression we obtain

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \{ \cos[(\omega + \alpha)\tau] + \cos[(\omega - \alpha)\tau] \} d\tau \\ &\quad + \tan \psi \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \{ \sin[(\omega + \alpha)\tau] + \sin[(\alpha - \omega)\tau] \} d\tau. \end{aligned}$$

Making use of

$$(7.9) \quad \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \cos(\alpha\tau) = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \sin(\alpha\tau) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

from (7.8) we obtain

$$(7.10) \quad \Gamma(\omega) = \frac{\beta + (\omega + \alpha) \tan \psi}{\beta^2 + (\omega + \alpha)^2} + \frac{\beta + (\alpha - \omega) \tan \psi}{\beta^2 + (\omega - \alpha)^2}$$

or

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \frac{[\beta + \omega \tan \psi + \alpha \tan \psi] [\omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2]}{[\omega^2 + 2\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2] [\omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2]} \\ &\quad + \frac{[\beta - \omega \tan \psi + \alpha \tan \psi] [\omega^2 + 2\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2]}{[\omega^2 + 2\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2] [\omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha^2 + \beta^2]} \\ &= \frac{\omega^2 [\beta + \alpha \tan \psi - 2\alpha \tan \psi + \beta + \alpha \tan \psi - 2\alpha \tan \psi]}{\omega^4 + (\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2} \\ &\quad + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)(\beta + \alpha \tan \psi)}{\omega^4 + (\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2}. \end{aligned}$$

Hence, we are finally led to the following expression::

$$(7.11) \quad \Gamma(\omega) = \frac{2[(\beta - \alpha \tan \psi)\omega^2 + (\beta + \alpha \tan \psi)(\alpha^2 + \beta^2)]}{\omega^4 + 2(\beta^2 - \alpha^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Note that (7.2) insures that spectral density (7.11) is positive.

We now write down  $\Gamma(\omega)$  in the form (6.9) in the general case when

$$(7.12) \quad \Gamma(\omega) = \frac{d_1 \omega^2 + d_2}{\omega^4 + c_1 \omega^2 + c_2} \quad (d_1, d_2 > 0; c_1^2 - 4c_2 < 0).$$

In order to have  $\Gamma(\omega) = |P(i\omega)/Q(i\omega)|^2$ , from (7.12) we see that  $P(z)$  is a first degree polynomial while the degree of  $Q(z)$  is two:

$$(7.13a) \quad P(z) = b_0 z + b_1,$$

$$(7.13b) \quad Q(z) = z^2 + a_1 z + a_2.$$

By imposing

$$\Gamma(\omega) = \frac{d_1 \omega^2 + d_2}{\omega^4 + c_1 \omega^2 + c_2} = \left| \frac{b_0 i \omega + b_1}{(i\omega)^2 + a_1 i \omega + a_2} \right|^2,$$

e.g.

$$(7.14a) \quad d_1 \omega^2 + d_2 = |b_0 \omega i + b_1|^2,$$

$$(7.14b) \quad \omega^4 + c_1 \omega^2 + c_2 = |a_1 \omega i + a_2 - \omega^2|^2,$$

from (7.14) we obtain

$$\begin{aligned} d_1 \omega^2 + d_2 &= b_0^2 \omega^2 + b_1^2, \\ \omega^4 + c_1 \omega^2 + c_2 &= \omega^4 + \omega^2(a_1^2 - 2a_2) + a_2^2. \end{aligned}$$

Hence,

$$(7.15) \quad d_1 = b_0^2, \quad d_2 = b_1^2, \quad c_1 = a_1^2 - 2a_2, \quad c_2 = a_2^2.$$

From (7.15) we finally obtain the coefficients of polynomials (7.13):

$$(7.16) \quad b_0 = \sqrt{d_1}, \quad b_1 = \sqrt{d_2}, \quad a_1 = \sqrt{c_1 + 2\sqrt{c_2}}, \quad a_2 = \sqrt{c_2}.$$

In the particular case of the process  $X(t)$  having covariance (7.1), by identifying the spectral density (7.11) with (7.12), one finds

$$\Gamma(\omega) = |P(i\omega)/Q(i\omega)|^2,$$

with

$$(7.17a) \quad P(z) = \sqrt{2(\beta - \alpha \tan \psi)} z + \sqrt{2(\beta + \alpha \tan \psi)(\alpha^2 + \beta^2)},$$

$$(7.17b) \quad Q(z) = z^2 + 2\beta z + \alpha^2 + \beta^2,$$

where use of (7.13) and (7.16) has been made.

To implement the simulation procedure of Section 6, recalling (6.22)-(6.24) we have to solve the stochastic differential equation (6.20) that is convenient to re-write as:

$$(7.18) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) - A \mathbf{v}(t) + \mathbf{y}(t),$$

in which

$$(7.19) \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 - \beta^2 & -2\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda(t) \end{pmatrix}.$$

By a well known procedure (see, for instance, Coppel 1965) the matrix  $e^{At}$  can be calculated. The final result is

$$(7.20) \quad e^{At} = \frac{e^{-\beta t}}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \cos(\alpha t) + \beta \sin(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -(\alpha^2 + \beta^2) \sin(\alpha t) & \alpha \cos(\alpha t) - \beta \sin(\alpha t) \end{pmatrix}.$$

To obtain the matrix  $M_{\mathbf{v}} = E[\mathbf{v}(0)\mathbf{v}^T(0)]$ , we have to calculate (see (6.34) and (6.35)) the quantities

$$M_{ij} = \begin{cases} m_i, & i = j = 0, 1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $m_0$  and  $m_1$  are the solutions of the system

$$a_2 m_0 - m_1 = 0, \quad a_1 m_1 = \frac{1}{2}.$$

Hence,

$$(7.21a) \quad m_0 = \frac{1}{2 a_1 a_2} = \frac{1}{4 \beta (\alpha^2 + \beta^2)},$$

$$(7.21b) \quad m_1 = \frac{1}{2 a_1} = \frac{1}{4 \beta},$$

so that

$$(7.22) \quad M_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4 \beta (\alpha^2 + \beta^2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4 \beta} \end{pmatrix}.$$

Since  $M_{\mathbf{v}}$  is diagonal, the factorization  $M_{\mathbf{v}} = B_{\mathbf{v}} B_{\mathbf{v}}^T$  is trivial:

$$(7.23) \quad B_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\beta(\alpha^2 + \beta^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}.$$

To calculate the elements  $m_{ij}$  of the matrix  $M_{\mathbf{r}} = E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^T(t)]$ , let us remark that the linear system (6.46) becomes

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 - \beta^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2 - \beta^2 \\ 1 & -2\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

or:

(7.24)

$$\begin{pmatrix} d_{12}^2 & d_{12} d_{22} \\ d_{12} d_{22} & d_{22}^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m_{12} & m_{22} - m_{11}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\beta m_{12} \\ m_{22} - m_{11}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\beta m_{12} & -2m_{12}(\alpha^2 + \beta^2) - 4\beta m_{22} \end{pmatrix},$$

where we have denoted by  $d_{ij}$  the elements of  $e^{\Delta t}$ .

Solving the system (7.24), we obtain:

$$(7.25a) \quad m_{11} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \frac{1}{4\beta} [1 - d_{22}^2 - d_{12}^2(\alpha^2 + \beta^2)] - \beta d_{12}^2 - d_{12} d_{22} \right\},$$

$$(7.25b) \quad m_{12} = \frac{d_{12}^2}{2},$$

$$(7.25c) \quad m_{22} = \frac{1}{4\beta} [1 - d_{22}^2 - d_{12}^2(\alpha^2 + \beta^2)].$$

It is now necessary to write  $M_{\mathbf{r}}$  in the form  $M_{\mathbf{r}} = B_{\mathbf{r}} B_{\mathbf{r}}^T$ , with  $B_{\mathbf{r}}$  a lower triangular matrix. Denoting the elements of  $B_{\mathbf{r}}$  by  $b_{ij}$ , one has:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix},$$

that is

$$b_{11}^2, \quad b_{11} b_{21} = m_{12}, \quad b_{21}^2 + b_{22}^2 = m_{22}.$$

We thus finally obtain

$$(7.26) \quad b_{11} = \sqrt{m_{11}}, \quad b_{21} = \frac{m_{12}}{\sqrt{m_{11}}}, \quad b_{22} = \sqrt{m_{22} - \frac{m_{12}^2}{m_{11}}}.$$

We are now in the position to construct sample paths of the normal process  $X(t)$  with covariance (7.1). Indeed, we first construct the sequence  $\mathbf{v}(k\Delta t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) and then obtain  $X(k\Delta t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Recalling (6.49) one obtains:

$$(7.27a) \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\beta(\alpha^2 + \beta^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^{(0)},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}[(k+1)\Delta t] &= \begin{pmatrix} v_1[(k+1)\Delta t] \\ v_2[(k+1)\Delta t] \end{pmatrix} \\
 (7.27b) \quad &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \mathbf{v}(k\Delta t) + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^{(k)},
 \end{aligned}$$

where the elements  $d_{ij}$  of  $e^{A\Delta t}$  are obtained from (7.20) while the  $b_{ij}$ 's are given by (7.26). The sequence  $\tilde{\mathbf{A}}^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) consists of two-dimensional standard normal samples. The values  $X(k\Delta t)$  can then be obtained by (6.50).

Recalling that  $b_0 = \sqrt{2(\beta - \alpha \tan \psi)}$  and  $b_1 = \sqrt{2(\beta + \alpha \tan \psi)(\alpha^2 + \beta^2)}$ , for  $k = 0, 1, 2, \dots$ , one is led to the following expression:

(7.28)

$$X(k\Delta t) = \sqrt{2(\beta - \alpha \tan \psi)} v_2(k\Delta t) + \sqrt{2(\beta + \alpha \tan \psi)(\alpha^2 + \beta^2)} v_1(k\Delta t).$$

Note that if one wishes to condition the process on the initial state  $X(0) = x_0$ ,  $v_2(0)$  must be calculated as indicated by (7.27a) and then  $v_1(0)$  must be taken in such a way that

$$x_0 = X(0) = \sqrt{2(\beta - \alpha \tan \psi)} v_2(0) + \sqrt{2(\beta + \alpha \tan \psi)(\alpha^2 + \beta^2)} v_1(0),$$

that is

$$(7.29) \quad v_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2(\beta + \alpha \tan \psi)(\alpha^2 + \beta^2)}} [x_0 - \sqrt{2(\beta - \alpha \tan \psi)} v_2(0)].$$

We stress that the normal process  $X(t)$  with correlation function (7.1) is m.s. continuous by virtue of the continuity of (7.1) in  $\tau = 0$ . Furthermore, it is m.s. differentiable since  $\ddot{\gamma}(0)$  is finite. Indeed, from (7.4) one obtains

(7.30)

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \gamma(\tau) = -\frac{e^{-\beta\tau}}{\cos \psi} [2\alpha\beta \sin(\alpha\tau - \psi) + (\beta^2 - \alpha^2) \cos(\alpha\tau - \psi)] \quad (\tau \geq 0),$$

so that

$$(7.31) \quad \left. \frac{d^2}{d\tau^2} \gamma(\tau) \right|_{\tau=0^+} = \beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta \tan \psi.$$

From the symmetry of  $\gamma(\tau)$  and hence of  $\ddot{\gamma}(\tau)$ , it follows  $d^2\gamma(\tau)/d\tau^2|_{\tau=0} = d^2\gamma(\tau)/d\tau^2|_{\tau=0+}$ . From (7.31) one then concludes that  $\ddot{\gamma}(0)$  is finite.

We remark that the process  $X(t)$  with correlation function (7.1) includes some well known processes as a special case. If, for instance, we set  $\beta = \alpha$  and  $\psi = \pi/4$  in (7.1) one is led to the B-2 type autocorrelation function

$$(7.32) \quad \gamma(\tau) = \sqrt{2} e^{-\alpha\tau} \cos\left(\alpha\tau - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\tau \geq 0).$$

If, instead, we set  $\psi = 0$  in (7.1) we obtain the following autocorrelation function

$$(7.33) \quad \gamma(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau) \quad (\tau \geq 0).$$

## 8 - IMPLEMENTATION OF THE SIMULATION PROCEDURE

The simulation procedure discussed in Section 6 is suitable to be implemented on supercomputers. Indeed, the error induced by Monte Carlo methods is of the order of  $1/\sqrt{N}$ , where  $N$  is the sample size. The latter must therefore be large. Since the sample paths of our process are generated independently of one another, it is possible to construct a vector algorithm to generate simultaneously a preassigned number of sample paths. Hence, by using a supercomputer the computation time is expected to shrink relevantly on the grounds of the mentioned parallel construction of the sample paths of the process.

We have set up a FORTRAN program suitable to be implemented on a supercomputer. We stress that the program has been conceived in a way to generate simultaneously independent sample paths of a Gaussian process. As soon as a sample path crosses the preassigned boundary  $S(t)$ , the instant when such a crossing takes place is recorded and then used to build up a histogram of the unknown FCT pdf through  $S(t)$ . Such a sample path is then discarded and the simulation is carried on starting afresh from the initial state  $x_0 = 0$  at the initial time  $t_0 = 0$ .

The simulation procedure consists of constructing the states  $X(k\Delta t)$  of  $X(t)$  at times  $t_k = k\Delta t$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). We assume that  $t_h = h\Delta t$  is the first crossing time of  $S(t)$  if

$$X(h\Delta t) \geq S(h\Delta t), \quad X(k\Delta t) < S(k\Delta t) \quad (k = 0, 1, \dots, h-1).$$

Hence, the error due to the introduced discretization is not larger than  $\Delta t$ . Therefore, the error for a sample of size  $N$  (that is of the order  $1/\sqrt{N}$ ) has to be of the same order of magnitude. It is thus convenient to choose  $N \approx (\Delta t)^{-2}$ .

The program is structured in such a way that after establishing the form of the covariance and of the boundary, the choice of the involved parameters can be made. Input variables are also the total number of sample paths to be simulated, the number of those that must be simultaneously simulated, the discretization step and the histogram's bin. At each step by means of (6.50) the states of the simultaneously simulated sample paths are determined. The vector  $\tilde{A}$  of the random numbers necessary to simulate the sample paths is constructed by a subroutine that adds up twelve pseudo-random numbers that are uniformly distributed in  $[0, 1]$ . The error committed by exploiting such a subroutine can be disregarded with respect to the intrinsic error of the simulation procedure due to the use of discrete sample paths and of a limited number of samples.

## 9 - FIRST CROSSING TIME TRENDS FOR NORMAL B-2 COVARIANCES PROCESSES

The first normal process taken into account is the one with a second order Butterworth covariance

$$(9.1) \quad \gamma(\tau) = \sqrt{2} \exp\{-\alpha\tau\} \sin(\alpha\tau + \pi/4) \quad (\tau > 0),$$

where  $\alpha$  is a positive parameter. Correspondingly we have the following spectral density:

$$(9.2) \quad \Gamma(\omega) = \frac{8\alpha^3}{\omega^4 + 4\alpha^4} \quad (\alpha > 0).$$

For such process we have exploited the simulation procedure to construct FCT pdf's through constant or periodically varying boundaries of the type  $S(t) = S_0 + A \sin(2\pi t/Q)$  or  $S(t) = S_0 + A \cos(2\pi t/Q)$  where  $S_0$ ,  $A$  and  $Q$  are positive constants. The results of the simulations indicate that in the case of constant boundaries the FCT pdf  $g(t)$  is rigorously unimodal (see Figures 1-11). For the case of periodic boundaries such a function may become multimodal and exhibit damped oscillations reflecting the

periodicity of the boundary (see Figures 13-32). We remark that the covariance (9.1), containing the unique parameter  $\alpha$ , has often been invoked to approximate correlation functions of interest for applications (see, for instance, Yaglom 1987). It is worth pointing out that Figures 1-7 refer to the case  $\alpha = 1$ , which corresponds to condition  $\omega_0 = \sqrt{2}$  studied in Ricciardi and Sato (1983) and Ricciardi and Sato (1986). In the Appendix a reference document, showing an example of the program use, has been reported for the case of a B-2 covariance and a constant boundary. In the sequel we shall briefly review some of the simulation results. Figure 1 provides a comparison between the results obtained by the simulation procedure and the approximation worked out in Ricciardi and Sato (1983) by making use of the first order approximation to  $g$  (higher curve) and second order approximation (lower curve). Figure 1 refers to the case of a unit boundary. As predicted by the theory (Ricciardi and Sato 1983 and Ricciardi and Sato 1986) the FCT pdf lies in between the above mentioned two approximations. Furthermore, the simulated FCT pdf and the first and second order approximations to  $g$  are in excellent agreement for short times, as theoretically predictable. Figure 2 shows the FCT pdf's for six different values of the boundary. From top to bottom they correspond to boundaries  $S = 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5$  and  $2.0$ . Note that all these curves are unimodal. As the boundary increases, the mode of FCT pdf increases while its peak decreases. Figures 3, 4 and 5 refer to the boundary values  $S = 0.5, 1.0$  and  $2.0$  respectively. The simulated pdf's are plotted. In each figure the function  $\langle T \rangle^{-1} \exp\{-t/\langle T \rangle\}$  has also been plotted, where  $\langle T \rangle$  is the average FCT computed over the  $10^5$  samples. The exponential trends of the FCT pdf's even for rather small times are evident. Moreover, the range of validity of the exponential approximation decreases as the boundary  $S$  increases. This phenomenon appears very clearly in Figures 6 and 7. This represents a striking analogy with a similar feature earlier discovered for a class of diffusion processes (see, for instance, Nobile et al. 1985a, Nobile et al. 1985b, Di Nardo et al. 2001b).

None of the cases thus far discussed show any multimodal behavior of the FCT pdf, in apparent contrast with the oscillatory behavior of the B-2 covariance function. To shade some light on such circumstance we have performed simulations using a variety of values of the parameter  $\alpha$ . Indeed, the choice  $\alpha = 1$  implies a quick decay of the covariance. In general, due to

the form of  $g$  and to the relation  $P = 2\pi/\alpha$  between the period  $P$  of the oscillatory part of the covariance and the decay constant  $\alpha$ , it follows that for large values of  $\alpha$  one obtains highly damped oscillations of the covariance so that such oscillations do not affect the shape of the FCT pdf. On the other hand as  $\alpha$  decreases the damping effect reduces but simultaneously the period  $P$  of the oscillations increases. The effect of such oscillations is therefore again invisible because practically most of the simulated sample paths have crossed the boundary before the first oscillation has been completed. Figures 8-12 show the results of simulation for  $\alpha = 0.1$  ( $P = 20\pi$ ),  $\alpha = 0.5$  ( $P = 4\pi$ ),  $\alpha = 2$  ( $P = \pi$ ),  $\alpha = 10$  ( $P = \pi/5$ ),  $\alpha = 20$  ( $P = \pi/10$ ), respectively. In all these cases the boundary has been taken equal to 1. The FCT pdf always appears as unimodal: as  $\alpha$  increases the mode decreases while the amplitude of the peak increases. This means that the whole probability mass approaches the  $y$ -axes as  $\alpha$  increases, so that the FCT pdf correspondingly goes to zero faster and faster. Actually, as  $\alpha$  increases the B-2 covariance normal process approaches a diffusion process of the OU type. Hence its sample paths are characterized by very rapid fluctuations so that boundaries close to the equilibrium point are almost instantaneously crossed. It should be stressed that a multimodal behavior of FCT pdf may be expected if the assumption of constant boundary is removed (see Figures 13-32).

The motivation to investigate the behavior of FCT pdf in the case of periodic boundaries is partly due to some results obtained in Giorno et al (1990). It was indeed shown there that for a certain class of Markov processes the FCT pdf's through periodic boundaries exhibit damped oscillations reflecting the periodicity of the boundary. We have thus been naturally led to investigate whether such behavior also occurs for Gaussian processes. To provide an answer to this question the simulation procedure has been adapted to include the variable boundary case. To this purpose we assume that a sample path crosses for the first time the boundary  $S(t)$  at time  $t_k$  if  $X(t_k) \geq S(t_k)$  and  $X(t_h) < S(t_k)$  for all  $h < k$ .

The performed simulations support the conjecture that for normal processes the behavior of FCT densities is analogue to that discovered for diffusion processes. Indeed, one finds that, after an initial phase about which we shall soon say something more, the computed FCT density exhibits a multimodal outlook, with successive maxima occurring after time intervals equal to the period of the boundary. The amplitudes of such

maxima decrease in time. Figures 13–16 show an example of what happens for the boundary  $S(t) = 1 + \sin(2\pi t/Q)$ , which is initially increasing and periodically oscillating with period  $Q$ . As far as the initial phase is concerned, we have been led to the following conclusions. Initially a peak shows up whose amplitude increases with the ratio  $\lambda \equiv Q/P$ . For instance, in Figure 13 ( $\lambda=1/2$ ) such a peak is too small to be noticed. In Figure 14 ( $\lambda = 1$ ), the presence of the initial peak can be observed; such peak becomes progressively more pronounced as  $\lambda$  increases. Figures 15 and 16 refer to the cases  $\lambda = 2$  and  $\lambda = 6$ , respectively. It should also be remarked that as the initial peak increases a progressive decrease of the amplitudes of the successive peaks takes place. This is obviously a consequence of the conservation of the total probability mass. Intuitively, this can also be understood by remarking that large values of  $\lambda$  (i.e. period of the boundary large with respect to the period of the oscillatory part of the covariance) imply that for small times the covariance is positive and close to unity. Therefore, the first-crossing-time is a high probability event and, consequently, the first-crossing-time, for large times, is a rare event. Qualitatively analogue results are obtained for initially decreasing periodic boundaries, such as  $S(t) = 1 + \cos(2\pi t/Q)$ . Figure 17 shows an FCT pdf for  $\lambda = 60$ . As is to be expected whenever  $\lambda$  is very large, i.e. when the boundary's period is much larger than that of the periodic term of the covariance, such pdf is unimodal. Indeed one expects to observe a behavior similar to that of constant boundary because for very large values of  $\lambda$  the boundary remains practically constant during the time interval in which the covariance is non-vanishing.

Figures 18–20 indicate, instead, the presence of an initial peak, in agreement with our previous remark for the case of boundaries of the type  $S(t) = 1 + \sin(2\pi t/Q)$ . As we have already stressed, the presence of this peak is due to the fact that the covariance has a maximum at time zero. As  $\lambda$  decreases (cf. Figures 21–23), the initial peak close to the origin tends to disappear, while other peaks are found, whose positions reflect the boundary's periodicity.

Whenever  $\lambda \leq 1$  the FCT pdf is multimodal, with successive relative maxima separated by a time interval equal to the boundary's period (see, for instance, Figures 23–24).

It is interesting to remark that the FCT pdf's corresponding to the same value of the ratio  $\lambda \equiv Q/P$  can be mapped into one another by a

suitable transformation that will be discussed in Section 11. The parameter  $P$  of the covariance appears in such transformation. Indeed, if  $\lambda \equiv Q/P = Q'/P'$ , it is experimentally observed (see Figures 26–32) that the following relations hold:

$$(9.3) \quad t' = \frac{P}{P'} t, \quad g'(t') = \frac{P}{P'} g(t),$$

where  $g(t)$  is the FCT pdf for the case of covariance with parameter  $P$  while  $g'(t')$  is the FCT pdf for the covariance with parameter  $P'$ .

#### 10 - FIRST CROSSING TIME TRENDS FOR NORMAL PROCESSES WITH A TWO-PARAMETER DAMPED OSCILLATING COVARIANCE

In order to widen up the field of investigation and thus reach more general conclusions on the dependence of the shape of the FCT pdf on the boundary's and covariance's oscillations, we referred to the following covariance function:

$$(10.1) \quad \gamma(t) = \exp\{-\beta t\} \cos \alpha t, \quad t \geq 0,$$

with  $\alpha, \beta > 0$ . The corresponding spectral density is then:

$$(10.2) \quad \Gamma(\omega) = \frac{2\beta(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2\omega^2(\beta^2 - \alpha^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Differently from the B-2 case, the presence in (10.1) of the two independent parameters  $\alpha$  and  $\beta$  permit us to assign arbitrarily the period  $P = 2\pi/\alpha$  of the periodic component of the covariance as well as the damping time-constant  $\beta$ .

We recall that the covariance (10.1) has been included in some models of processes of practical interest. Furthermore, often it turns out to be very useful to approximate certain empirical covariance functions in which positive values are succeeded by negative values, such as in the fading of radio signals received by a radar (see, for instance, Yaglom 1987).

Since the spectral density (10.2) is of rational type, with the denominator a polynomial of degree less than the numerator, Franklyn's method is again applicable; hence, the algorithm of Section 6 can be exploited.

First the behavior of the FCT pdf has been investigated in the case of constant boundaries. As shown by Figures 33–45 the results of the simulations can be summarized as follows: according to the values of the parameters of covariance (10.1) and to the values of the boundary, the FCT pdf  $g(t)$  exhibits a unimodal, a bimodal or a multimodal behavior. For large values of  $\beta$  (see, for instance, Figure 33)  $g(t)$  is unimodal. Indeed, as  $\alpha$  decreases the exponential term in  $\gamma(t)$  dominates, so that the process tends to the Ornstein-Uhlenbeck process whose FCT density through a constant boundary is known to be unimodal. As  $\beta$  decreases, the effect of the periodic component of the covariance progressively emerges (see, for instance, Figures 34, 35 and 37):  $g(t)$  then exhibits more than one peak, being bimodal or multimodal. Whenever the visible peaks are more than two, the first two are characterized by amplitudes largely exceeding that of the other peaks (see Figures 37, 39, 45). Each visible peak has a distance  $P/2 \equiv \pi/\alpha$  from the adjacent ones. A rough explanation of such behavior may be the following one. For not too large times  $t$  the random variable  $X(t)$ , conditioned on  $X(0) = 0$ , is approximately  $\mathcal{N}(0, 1 - \gamma^2(t))$ . Hence, its variance is given by  $D^2(t) = 1 - \exp\{-2\beta t\} (\cos \alpha t)^2$ , which oscillates with a period  $P/2 \equiv \pi/\alpha$ . In the time intervals during which  $D^2(t)$  is large the process undergoes rapid fluctuations so that boundary crossings are very likely. Figures 37, 39, 42–45 indeed clearly show that the abscissae  $t_i$  of the peaks of  $g(t)$  are, to a good degree of approximation, given by  $t_i = P/4 + kP/2$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), which corresponds to the maxima of  $D^2(t)$ . The calculations leading to the determination of maxima and minima of  $D^2(t)$  are sketched at the end of the present Section. It should be emphasized that the above interpretation can be taken as reasonable only for small times, namely when the measure of the sample paths that have already crossed the boundary is not too large. For any preassigned specification of the parameters in the covariance, as the boundary increases the number of visible peaks increases while  $g(t)$  goes to zero less rapidly. Figures 40, 36, 41–43 show the functions  $g(t)$  for  $\alpha = \pi$  (i.e.  $P = 2$ ) and  $\beta = 0.1$ , respectively for the boundaries  $S = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ . Figures 37 and 44, instead, show  $g(t)$  for  $\alpha = \pi$  (i.e.  $P = 2$ ),  $\beta = 0.01$  and  $S = 1, 2$ , respectively. The presence of a larger number of peaks is due to the decrease of the probability of boundary crossings for small times when the boundary is initially large.

To summarize, the parameter  $\alpha$  regulates the periodic component of  $g(t)$ ; indeed, the distance between successive component of  $g(t)$  is inversely proportional to  $\alpha$ . For a fixed  $\beta$ , as  $\alpha$  decreases the covariance  $\gamma(t)$  approaches that of the Ornstein-Uhlenbeck process:  $g(t)$  thus tends to exhibit a unique peak. In turn,  $\beta$  characterizes the time interval during which  $g(t)$  is appreciably non-vanishing. For a fixed  $\alpha$ , as  $\beta$  increases the covariance  $\gamma(t)$  again approaches that of the Ornstein-Uhlenbeck process: hence,  $g(t)$  exhibits a unique peak. As  $\beta$  decreases, the oscillatory component of the covariance plays a progressively more important role, which is responsible for the multimodal outlook of  $g(t)$ .

To analyze the behavior of the FCT pdf for the case of periodic boundaries, we have focused our attention to the boundary

$$(10.3) \quad S(t) = A + \sin\left(\frac{2\pi}{Q} t\right),$$

with  $A$  and  $Q$  preassigned constants. The boundary is, therefore, a periodic function of period  $Q$ , initially increasing and oscillating around the level  $A$ . The results of the simulations have led us to the following conclusions. Again the behavior of  $g(t)$  is determined by the values of the parameters appearing in the covariance function and in the threshold. Whenever  $P < Q$ , for small times the effect of the covariance is evident and the FCT density has a maximum near the first minimum of the threshold. Because of the oscillations of the covariance, the relative maxima having abscissae less than or equal to the first period of the threshold occur after time intervals of duration  $P/2$ . After the first period of the threshold, the successive peaks of  $g(t)$  show up near the minima of the threshold (cf. Figures 46–57). Figures 46–48 refer to the covariance specified by  $\alpha = \pi$  (i.e.  $P = 2$ ) and  $\beta = 0.1$ , and to the boundary (10.3) with  $A = 2$  and periods  $Q = 3, 5$  and  $7$ , respectively. Figures 50–52 refer, respectively, to the same boundaries; however, the underlying process has covariance (10.1) with parameters  $\alpha = \pi$  (i.e.  $P = 2$ ) and  $\beta = 0.05$ . Figures 46, 50 and 53 refer to the boundary (10.3) with  $A = 2$  and  $Q = 3$ , while  $\alpha = \pi$  (i.e.  $P = 2$ ) and  $\beta$  takes the values  $0.1, 0.05$  and  $0.01$ , respectively. Similarly, in the case of Figures 47, 51 and 55, the boundary is given by (10.3) with  $A = 2$  and  $Q = 5$ , while  $\alpha = \pi$  (i.e.  $P = 2$ ) and  $\beta = 0.1, 0.05$  and  $0.01$ , respectively. These figures show that as  $\beta$  decreases the probability of long crossing times increases.

Correspondingly, the performed computations show that the average first crossing time increases.

Whenever  $P = Q$  one can observe two sequences of peaks of  $g(t)$  (see Figures 13 and 14). The first sequence consists of peaks occurring after time intervals equal to the period of the threshold. The second sequence consists of peaks of smaller amplitudes that occur at instants that are multiple of the period of the periodic component of the covariance. If  $P > Q$  the covariance (cf. Figures 60 and 61) does not appear to affect the behavior of  $g(t)$ . The FCT density is indeed multimodal, the distance between any two successive peaks being equal to  $Q$ . Again, for the covariance  $\gamma(t)$  a phenomenon similar to that outlined for the B-2 case occurs: the function  $g(t)$  corresponding to a constant ratio  $\lambda \equiv P/Q$  can be obtained from one another via the transformation (9.3).

We conclude this Section by sketching the determination of minima and maxima of

$$(10.4) \quad D^2(t) = 1 - \exp\{-2\beta t\} (\cos \alpha t)^2.$$

To this purpose we differentiate (10.4) to obtain

$$(10.5) \quad \frac{d}{dt} D^2(t) = 2e^{-2\beta t} \cos(\alpha t) [\beta \cos(\alpha t) + \alpha \sin(\alpha t)],$$

which vanishes for  $\cos(\alpha t) = 0$ , i.e. at

$$(10.6) \quad t_k = \frac{P'}{2} + k P' \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

where we have set  $P' \equiv \pi/\alpha = P/2$ . The right-hand side of (10.5) also vanishes if  $\beta \cos(\alpha t) + \alpha \sin(\alpha t) = 0$ , i.e. for

$$(10.7) \quad \tau_r = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + r P' \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

To find the maxima of  $D^2(t)$  we differentiate (10.5) to obtain:

$$\frac{d^2}{dt^2} D^2(t) = 2e^{-2\beta t} [-2\alpha\beta \sin(2\alpha t) + \alpha^2 \cos(2\alpha t) - 2\beta^2 \cos^2(\alpha t)].$$

Therefore

$$\frac{d^2}{dt^2} D^2(t) \Big|_{t=t_k} = -2\alpha^2 \exp\left\{-2\frac{\beta\pi}{\alpha}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right\} < 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Hence, the instants (10.6) are relative maxima for  $D^2(t)$ . Finally using the trigonometric identities

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

$$\arctan(x) = \begin{cases} -\arccos(x/\sqrt{1+x^2}), & x < 0 \\ \arccos(x/\sqrt{1+x^2}), & x > 0 \end{cases}$$

one obtains:

$$\frac{d^2}{dt^2} D^2(t) \Big|_{t=\tau_r} = 2\alpha^2 \exp\{-2\beta\tau_r\} > 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

so that (10.7) are relative minima for  $D^2(t)$ .

## 11 - TRANSFORMATIONS OF FCT PROBABILITY DENSITIES

In Sections 9 and 10 we have mentioned the possibility of obtaining the FCT pdf for a normal process with covariance of the type considered in the foregoing for certain choices of the parameters, in terms of the FCT pdf corresponding to another suitable set of parameters. In this Section we shall enter into a more comprehensive discussion of this topic, as a relevant saving of computation time can be achieved.

Let  $X(t)$  be a stationary normal process with zero mean and covariance  $\gamma(t) = E[X(\tau)X(\tau+t)]$ ; furthermore, let us assume that at the initial time  $t = 0$  the process is in the state zero, i.e.  $P\{X(0) = 0\} = 1$ . We now recall that the FCT pdf of  $X(t)$  through a continuous boundary  $S(t)$  is defined as follows:

$$(11.1) \quad g[S(t), t | 0] = \frac{\partial}{\partial t} P\left[\inf\{\sigma > 0 : X(\sigma) \geq S(\sigma) \mid X(0) = 0\} \leq t\right].$$

Let us now perform the transformation

$$(11.2) \quad x' = x, \quad t' = ct \quad (c > 0).$$

Then, the transformed process  $X'(t')$  is related to  $X(t)$  by

$$(11.3) \quad X'(t') = X\left(\frac{t'}{c}\right).$$

From (11.3) the covariance  $\gamma'(t')$  of  $X'(t')$  follows:

$$(11.4) \quad \gamma'(t') = E[X'(\tau')X'(\tau' + t')] = E\left[X\left(\frac{\tau'}{c}\right)X\left(\frac{\tau'}{c} + \frac{t'}{c}\right)\right] = \gamma\left(\frac{t'}{c}\right).$$

The process  $X'(t')$  is itself normal, stationary, with zero-mean and initial state  $X'(0) = 0$ . Furthermore, one has  $\gamma'(0) = 1$ .

In the sequel we shall assume that  $X(t)$  is a member of a class of stationary, zero-mean, normal processes with a specified covariance, the latter containing a number of parameters on which its shape depends. Our problem is to determine conditions such that transformation (11.2) changes  $X(t)$  into a process  $X'(t')$  belonging to the same class as  $X(t)$ . Let  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  be the parameters appearing in the covariance function and let us further assume that  $\gamma(t) \equiv \gamma(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_k t)$ . By means of transformation (11.2) we then construct the process  $X'(t')$ . Due to (11.4), its covariance is given by

$$\gamma'(t') = \gamma\left(\frac{t'}{c}\right) = \gamma\left(\frac{t'}{c}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\right) = f\left(\frac{\alpha_1}{c} t', \frac{\alpha_2}{c} t', \dots, \frac{\alpha_k}{c} t'\right).$$

We have thus obtained a process which is a member of the same class, with parameters  $\alpha_1/c, \alpha_2/c, \dots, \alpha_k/c$ . We stress that such property is shared by a B-2 covariance normal processes as well as by processes whose covariance exhibits a damped oscillatory behavior. Indeed, for a B-2 type covariance process one has:

$$(11.5) \quad \gamma(t) = \gamma(t; \alpha) = f(at) = \sqrt{2} e^{-\alpha t} \sin\left(at + \frac{\pi}{4}\right).$$

Instead, for processes with damped oscillatory covariance one has:

$$(11.6) \quad \gamma(t) = \gamma(t; \alpha, \beta) = f(at, \beta t) = e^{-\beta t} \sin(\alpha t).$$

It should be remarked that a covariance function does not need to be of the form  $\gamma(t) = f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_k t)$ . In such cases the previous conclusion does not hold, as is for instance shown by the following covariance:

$$(11.7) \quad \gamma(t) = e^{\beta t} \log_{\alpha}(t + \alpha) \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Let  $S(t)$  be the boundary and  $X(t)$  the normal process into consideration. Transformation (11.2) changes equation

$$(11.8) \quad x = S(t)$$

of the boundary for  $X(t)$  into equation

$$(11.9) \quad x' = S\left(\frac{t'}{c}\right).$$

The FCT problem for  $X(t)$  through  $S(t)$  is thus changed into the FCT problem for  $X'(t')$  through the boundary

$$(11.10) \quad S'(t') = S\left(\frac{t'}{c}\right).$$

Hence, setting

$$(11.11) \quad g'[S'(t'), t' | 0] = \frac{\partial}{\partial t'} P\left(\inf\{\sigma > 0 : X'(\sigma) \geq S'(\sigma) \mid X'(0) = 0\} \leq t'\right),$$

due to transformation (11.2) the FCT pdf's (11.1) and (11.11) are related by

$$(11.12) \quad g[S(t), t | 0] dt = g'[S'(t'), t' | 0] dt'.$$

Then,

$$(11.13) \quad g'[S'(t'), t' | 0] = g[S(t), t | 0] \frac{dt}{dt'} \Big|_{t=t'/c} = \frac{1}{c} g\left[S\left(\frac{t'}{c}\right), \frac{t'}{c} \mid 0\right].$$

In other words the FCT pdf of  $X'(t')$  through  $S'(t')$  is obtained from the FCT pdf of  $X(t)$  through  $S(t)$  by re-scaling times by a factor  $1/c$  and then dividing the latter by  $c$ .

We remark that if the boundary  $S(t)$  is periodic also the boundary  $S'(t')$  is periodic. In particular, if

$$(11.14) \quad S(t) = S(t + nQ)$$

(i.e. if the boundary has period  $Q$ ), then by virtue of (11.10) and (11.14) one has

$$(11.15) \quad S'(t') = S\left(\frac{t'}{c}\right) = S\left(\frac{t'}{c} + nQ\right) = S\left(\frac{t' + n c Q}{c}\right) = S'(t' + n c Q).$$

The transformed boundary  $S'(t')$  is thus periodic with period  $Q' = cQ$ .

On the other grounds of the foregoing, we are led to the following conclusions. Let  $X(t)$  be a stationary normal process with zero-mean and covariance

$$(11.16) \quad \gamma(t) \equiv \gamma(t; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = f(\alpha_1 t, \dots, \alpha_k t).$$

Let  $g[S(t), t | 0]$  be the FCT pdf for  $X(t)$  through the periodic boundary  $S(t)$  with period  $Q$  for the choices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  of the parameters present in the covariance (11.16). Then, let us denote by  $g'[S'(t), t | 0]$  the FCT pdf for  $X(t)$  through the boundary  $S'(t) = S(tQ/Q')$ , periodic with period  $Q'$ , for the choices  $\alpha_1 Q/Q', \alpha_2 Q/Q', \dots, \alpha_k Q/Q'$  of the parameters of (11.16). Then,

$$(11.17) \quad g[S'(t), t | 0] = \frac{Q}{Q'} g\left[S\left(\frac{Q}{Q'} t\right), \frac{Q}{Q'} t \mid 0\right]$$

The relation (11.17) for instance holds if  $X(t)$  is a B-2 covariance process, i.e. if the covariance is given by (11.5). Furthermore, let  $g[S(t), t | 0]$  be the FCT pdf (11.1) for the boundary

$$(11.18) \quad S(t) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{Q} t\right)$$

and for the choice  $\alpha$  for the parameter in (11.5). Let us finally denote by  $g[S'(t), t | 0]$  the FCT pdf for the boundary

$$(11.19) \quad S'(t) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{Q'} t\right)$$

and for the choice  $\alpha Q/Q' \equiv \alpha'$  of the parameter in (11.5). Then,

$$(11.20) \quad g'[S'(t), t | 0] = \frac{1}{c} g\left[S\left(\frac{t}{c}\right), \frac{t}{c} \mid 0\right]$$

with  $c$  given by

$$(11.21) \quad c = \frac{Q'}{Q} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{P'}{P},$$

since  $\alpha = 2\pi/P$  and  $\alpha' = 2\pi/P'$ .

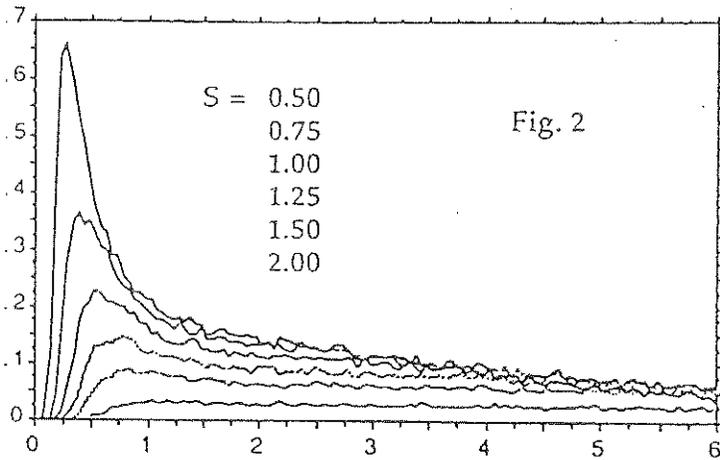
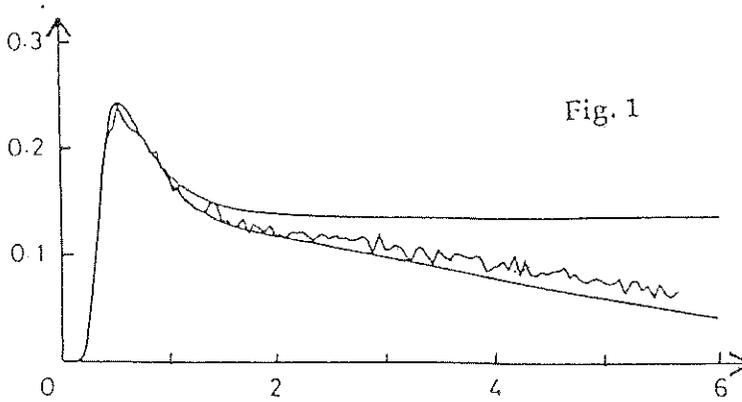
In conclusion, the FCT pdf for a preassigned pair  $P, Q$  can be determined via (11.20) from the FCT pdf corresponding to a pair  $P', Q'$ , provided that  $Q/P = Q'/P'$ . When this condition is satisfied, the parameter  $c$  appearing in (11.20) is obtained from (11.21). Such a procedure can be exploited for the covariance functions used in our simulations, as shown by Figures 26–32 and 58–59.

## REFERENCES

- Abrahams J. (1986) *A survey of recent progress on level crossing problems for random processes*. In Communications and Networks. A Survey of Recent Advances. (Blake I.F. and Poor H.V. eds.), 6–25. Springer-Verlag, New York.
- Blake I.F. and Lindsey W.C. (1973) *Level crossing problems for random processes*. IEEE Trans. Inform. Theory **19**, 295–315.
- Buonocore A., Caputo L. and Pirozzi E. (2008) *On the Evaluation of Firing Densities for Periodically Driven Neuron Models*. Math. Biosci. **214**, 122–133.
- Buonocore A., Giorno V., Nobile A.G. and Ricciardi L.M. (1990a) *On the two-boundary first-crossing-time problem for diffusion processes*. J. Appl. Prob. **27**, 102–114.
- Buonocore A., Iardino F., Nakamura A. and Ricciardi L.M. (1990b) *First-passage-time trends for Normal B-2 covariances processes*. In Cybernetics and Systems '90 (Trapp R. ed.), 405–412. World Scientific, Singapore.
- Buonocore A., Nobile A.G. and Ricciardi L.M. (1987) *A new integral equation for the evaluation of first-passage-time probability densities*. Adv. Appl. Prob. **19**, 784–800.
- Buonocore A. and Visentin F. (1992) *On the numerical evaluation of first-passage-time probability densities for one dimensional diffusion processes*. Ricerche di Matematica. **41-1**, 147–161.
- Coppel W.A. (1965) *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. D.C. Heath and Company, Boston.
- Crow J.F. and Kimura M. (1970) *An Introduction to Population Genetics Theory*. Harper and Row, New York.
- Davenport W.B. and Root W.L. (1958) *An Introduction to the Theory of the Random Signals and Noise*. Mc Graw-Hill, New York.

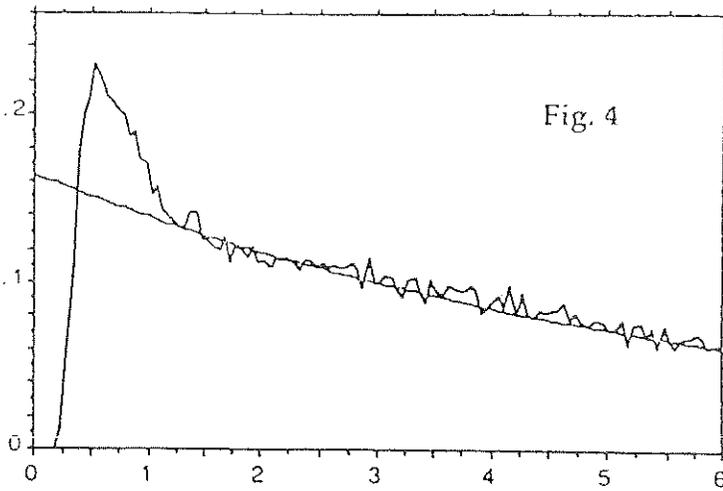
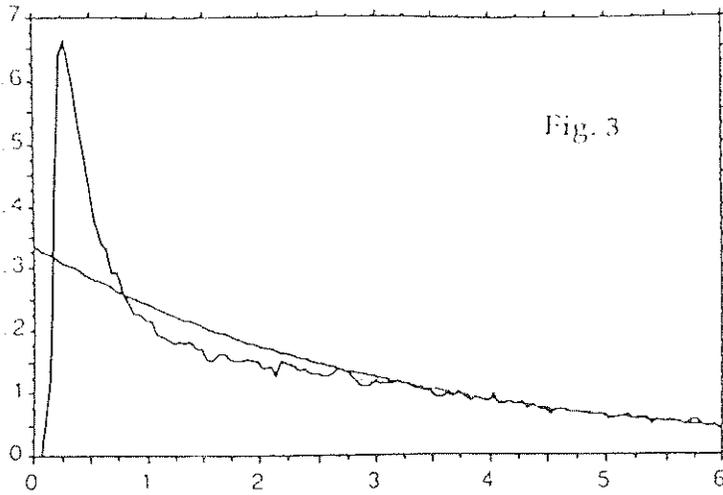
- Di Crescenzo A., Iardino F., Ricciardi L.M. and Rinaldi S. (1990) *Simulation of normal processes for first-crossing densities evaluations*. In Atti del Convegno ISCS 1990, 110–119. ISCS, Rome.
- Di Nardo E., Nobile A.G., Pirozzi E. and Ricciardi L.M. (2001a) *Computer-aided simulations of Gaussian processes and related asymptotic properties*. LNCS **2178**, 67–78.
- Di Nardo E., Nobile A.G., Pirozzi E. and Ricciardi L.M. (2001b) *A computational approach to first-passage-time problems for Gauss-Markov processes*. Adv. Appl. Prob. **33**, 453–482.
- Di Nardo E., Nobile A.G., Pirozzi E. and Ricciardi L.M. (2003a) *On the asymptotic behavior of first passage time densities for stationary Gaussian processes and varying boundaries*. Methodol. Comput. in Appl. **5**, 211–233.
- Di Nardo E., Nobile A.G., Pirozzi E. and Ricciardi L.M. (2003b) *Towards the modeling of neuronal firing by Gaussian processes*. SCMJ **58**, 255–264.
- Di Nardo E., Nobile A.G., Pirozzi E., Ricciardi L.M. and Rinaldi S. (2000) *Simulation of Gaussian processes and first passage time densities evaluation*. LNCS **1798**, 319–333.
- Di Nardo E. and Pirozzi E. (1997) *On the Estimation of FirstPassage Time Densities for Stationary Normal Processes*. In Frontiers in Artificial Intelligence and Applications (Morabito F.C., ed.), 383–387. IOS Press, Amsterdam.
- Di Nardo E., Pirozzi E., Ricciardi L.M. and Rinaldi S. (1997) *Vectorized simulations of normal processes for first-crossing-time problems*. LNCS **1333**, 177–188.
- Durbin J. (1985) *The first-passage density of a continuous Gaussian process to a general boundary*. J. Appl. Prob. **22**, 99–122.
- Fortet R. (1943) *Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique*. J. Math. Pures Appl. **22**, 177–243.
- Franklin J.N. (1965) *Numerical simulation of stationary and non stationary Gaussian random processes*. SIAM Review **7**, 68–80.
- Giorno V., Nobile A.G. and Ricciardi L.M. (1989a) *A symmetry-based constructive approach to probability densities for one-dimensional diffusion processes*. J. Appl. Prob. **27**, 707–721.
- Giorno V., Nobile A.G., Ricciardi L.M. and Sato S. (1989b) *On the evaluation of first-passage-time probability densities via non-singular integral equations*. Adv. Appl. Prob. **21**, 20–36.
- Giorno V., Nobile A.G. and Ricciardi L.M. (1990) *On the asymptotic behavior of first-passage-time densities for one-dimensional diffusion processes and varying boundaries*. Adv. Appl. Prob. **22**, 883–914.
- Golub G.H. and Van Loan C.F. (1983) *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press Baltimore, Maryland.

- Iardino F., Di Crescenzo A., Ricciardi L.M. and Rinaldi S. (1990) *Vectorized simulations of normal processes for first passage time densities evaluation*. In Proceedings of the 1990 UKSC Conference on Computer Simulation (Nock K.G. ed.), 102–107. Burgess Hill, Brighton.
- Jazwinski A.H. (1970) *Stochastic processes and filtering theory*. Academic Press, New York.
- Maruyama T. (1977) *Stochastic problems in Population Genetics*. Lectures Notes in Biomathematics, Vol. 17. Springer-Verlag, Berlin.
- Nielsen S.R.K. (1990) *Approximations to the probability of failure in random vibration by integral equation methods*. J. Sound and Vibr. **137**, 305–317.
- Nielsen S.R.K. and Sorensen J.D. (1988) *Probability of failure in random vibration*. J. Engin. Mech. **114**, 1218–1230.
- Nobile A.G., Ricciardi L.M. and Sacerdote L. (1985a) *Exponential trends of Ornstein-Uhlenbeck first-passage-time densities*. J. Appl. Prob. **22**, 360–369.
- Nobile A.G., Ricciardi L.M. and Sacerdote L. (1985b) *Exponential trends of first-passage-time densities for a class of diffusion processes with steady-state distribution*. J. Appl. Prob. **22**, 611–618.
- Ricciardi L.M., Di Crescenzo A., Giorno V. and Nobile A.G. (1999) *An outline of Theoretical and Algorithmic Approaches to First Passage Time Problems with Applications to Biological Modeling*. Math. Japonica **50**, 247–322.
- Ricciardi L.M., Di Crescenzo A., Iardino F., and Rinaldi S. (1991) *Vectorized simulations of normal processes and the first passage time probability problem*. In Noise in Physical Systems and  $1/f$  Fluctuations (Musha T., Sato S. and Yamamoto M. eds.), 383–388. Ohmsha Ltd, Tokyo.
- Ricciardi L.M. and Lansky P. (2002) *Diffusion models of neuron activity*. In The Handbook of Brain Theory and Neural Networks (Arbib M.A., ed.), 343–348. Nature Publishing Group, London.
- Ricciardi L.M. and Sato S. (1983) *A note on first passage time for Gaussian processes and varying boundaries*. IEEE Transactions on Information Theory **29**, 454–457.
- Ricciardi L.M. and Sato S. (1986) *On the evaluation of first-passage-time densities for Gaussian processes*. Signal Processing **11**, 339–357.
- Ricciardi L.M. and Sato S. (1990) *Diffusion processes and first-passage-time problems*. In Lectures in Applied Mathematics and Informatics (Ricciardi L.M. ed.), 206–285. Manchester University Press, Manchester.
- Tong (1990) *The multivariate Normal Distribution*. Springer-Verlag, New York.
- Yaglom A.M. (1987) *Correlation Theory of Stationary Related Random Functions*. Vol I: *Basic Results*. Springer-Verlag, New York.



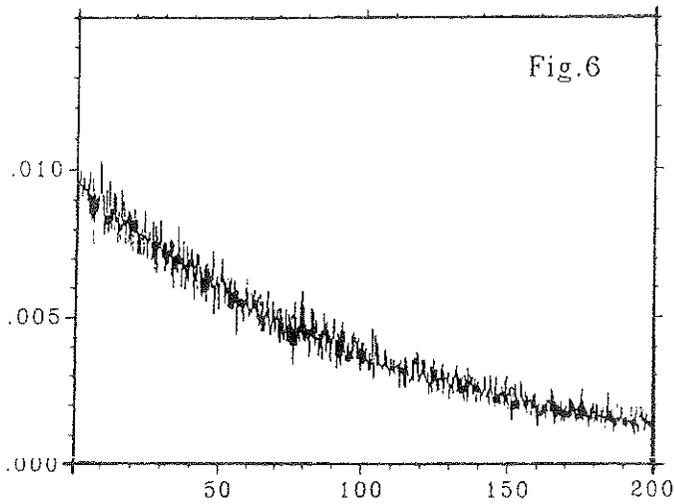
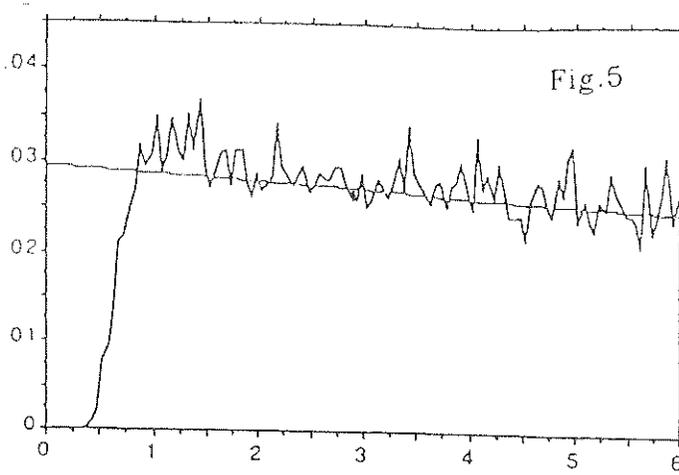
**Figure 1** Stationary Gaussian process with Butterworth-type 2 covariance. Here  $\alpha = 1$  and boundary  $S = 1$ . The upper curve is the first-order approximation, the lower one is the second-order approximation obtained in Ricciardi and Sato (1980). The irregular curve between them is the simulated FPT density.

**Figure 2** Gaussian process as in Fig. 1. Plot of experimental FPT densities for different values of constant boundary  $S$ . From top to bottom boundary values are  $S = 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5$  and  $2.0$ .



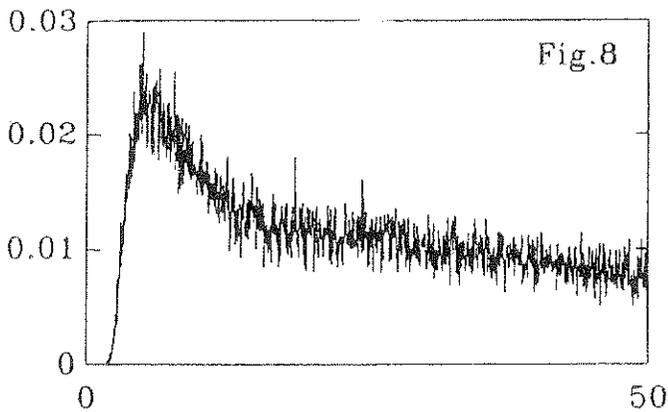
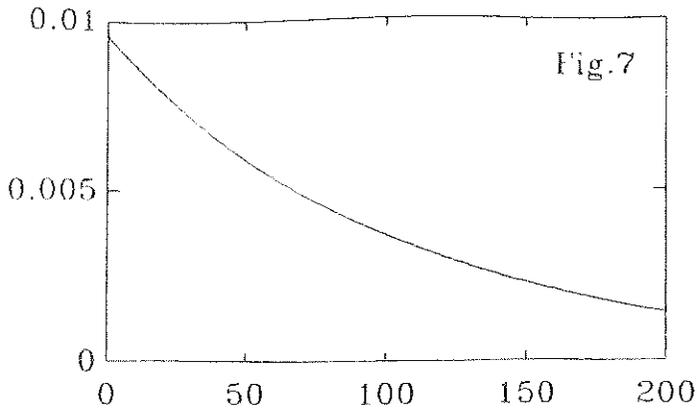
**Figure 3** Same process as in Fig. 1. Plot of experimental FPT density for  $S = 0.5$ . The function  $\langle T \rangle^{-1} \exp\{-t / \langle T \rangle\}$  is also plotted.

**Figure 4** Normal process as in Fig. 1. Plot of experimental FPT density for the constant boundary  $S = 1$ . The function  $\langle T \rangle^{-1} \exp\{-t / \langle T \rangle\}$  is also plotted.



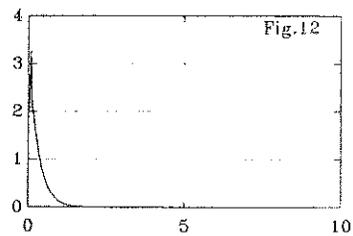
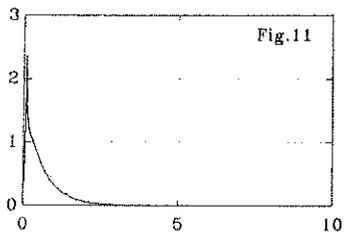
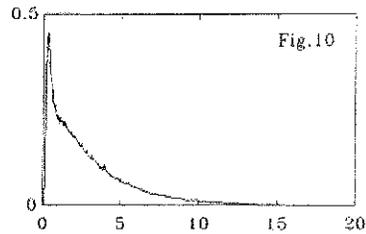
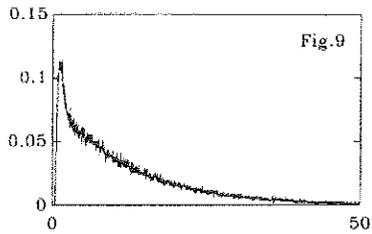
**Figure 5** Same process as in Fig. 1. Experimental FPT density for the constant boundary  $S = 2.0$ . The function  $\langle T \rangle^{-1} \exp\{-t/\langle T \rangle\}$  is also plotted.

**Figure 6** Same process as in Fig. 3. The simulated FPT density is plotted for the boundary  $S = 2.5$ .



**Figure 7** Plot of  $\langle T \rangle^{-1} \exp\{-t/\langle T \rangle\}$  where  $\langle T \rangle$  is the average FPT computed over  $10^5$  samples for the process and the boundary of Fig. 6. Note that this provides a good fit of the simulated density of Figure 6.

**Figure 8** Experimental FPT pdf for a stationary Gaussian process with B-2 covariance function through a constant boundary. Here  $\alpha = 0.1$  and  $S = 1$ .



**Figure 9** Simulation results for the process of Fig. 8. The experimental FPT density is plotted for the case  $\alpha = 0.5$ .

**Figure 10** Same as in Fig. 8 with  $\alpha = 2.0$ .

**Figure 11** Simulation results as in Fig. 8, but for  $\alpha = 10$ .

**Figure 12** As in Fig. 8 with  $\alpha = 20$ .

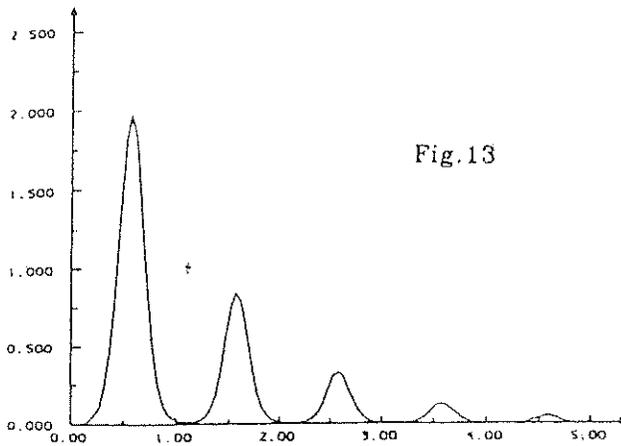


Fig. 13

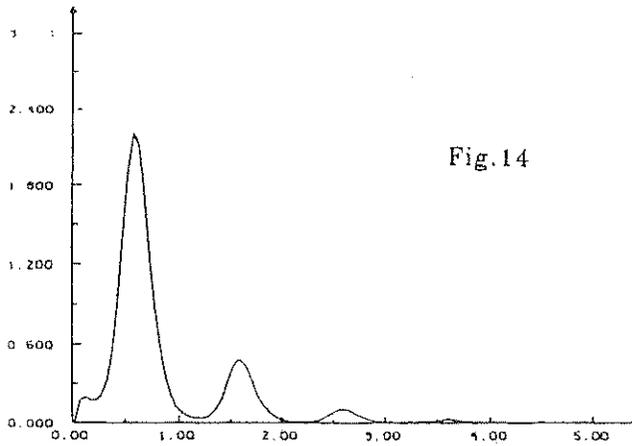


Fig. 14

**Figure 13** Experimental FPT pdf for a stationary Gaussian process with B-2 type covariance function through a time-dependent boundary  $S(t) = 1 + \sin(2\pi t/Q)$ . Here  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ) and  $Q = 1$ .

**Figure 14** As in Fig. 14 with  $\alpha = 2\pi$  ( $P = 1$ ) and  $Q = 1$ .

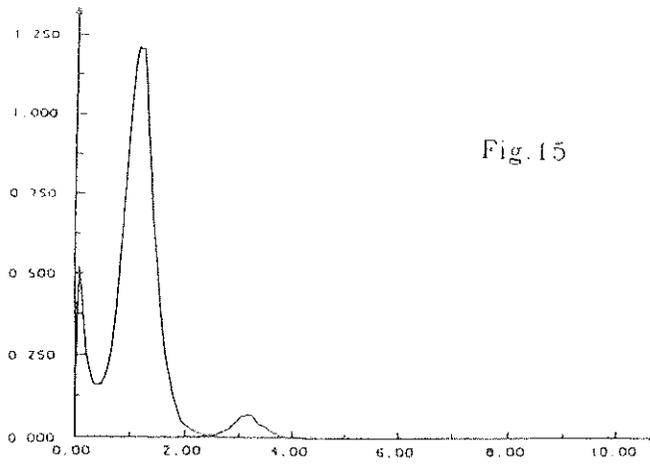


Fig.15

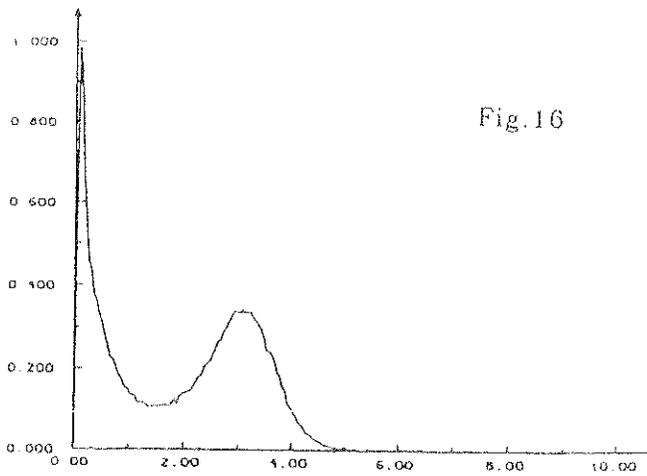
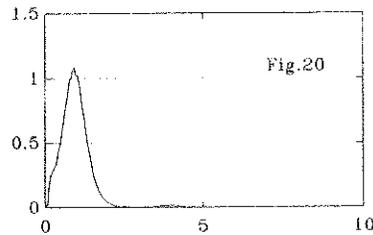
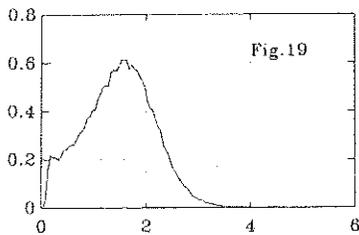
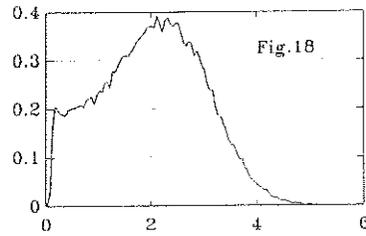
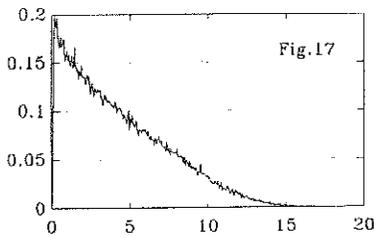


Fig.16

**Figure 15** As in Fig. 14 with  $\alpha = 2\pi$  ( $P = 1$ ) and  $Q = 2$ .

**Figure 16** As in Fig. 14 with  $\alpha = 2\pi$  ( $P = 1$ ) and  $Q = 6$ .

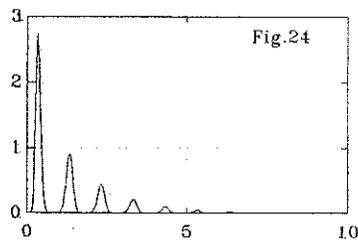
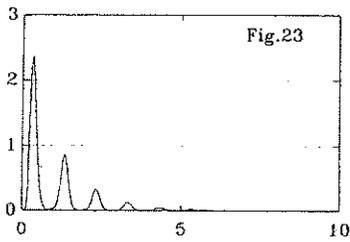
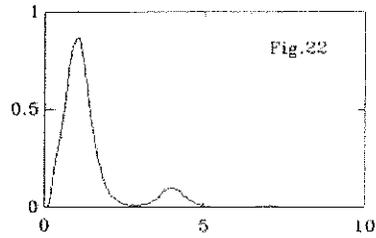
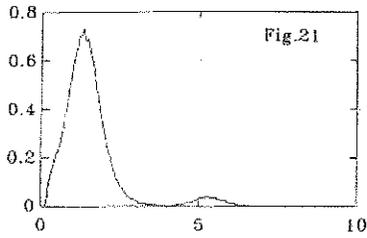


**Figure 17** Experimental FPT pdf of a stationary Gaussian process with covariance function of the B-2 type through the time-dependent boundary  $S(t) = 1 + \cos(2\pi t/Q)$ . Here  $\alpha = \pi$  ( $P = 1$ ) and  $Q = 60$ .

**Figure 18** Results of the simulations for the case of Figure 17, but with  $Q = 10$ .

**Figure 19** As in Fig. 17 but with  $Q = 6$ .

**Figure 20** As in Fig. 17, with  $Q = 3$ .

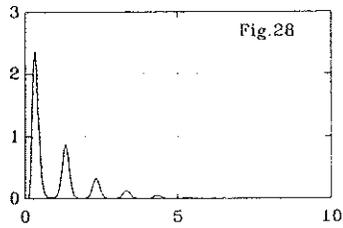
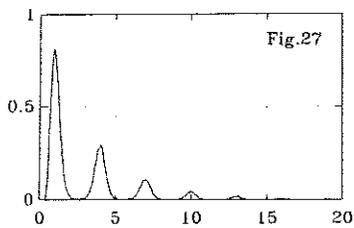
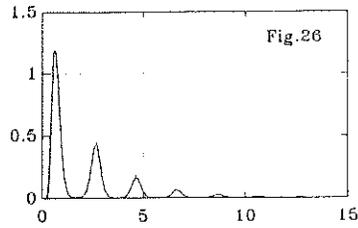
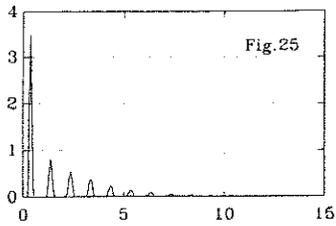


**Figure 21** As in Fig. 17 with  $P = 2$  and  $Q = 3$ .

**Figure 22** Experimental result for the case of Figure 17 with  $P = 2$  and  $Q = 4$ .

**Figure 23** Simulation result as in Figure 17 with  $P = 2$  and  $Q = 1$ .

**Figure 24** As in Figure 17 with  $P = 3$  and  $Q = 1$ .

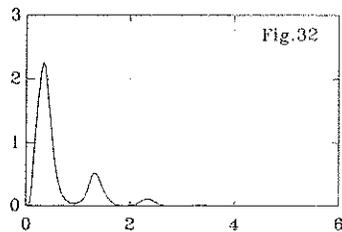
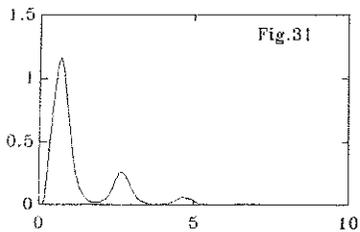
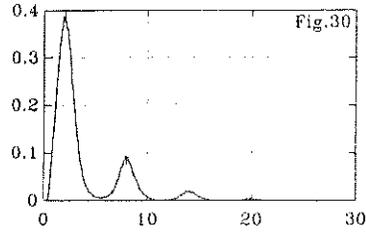
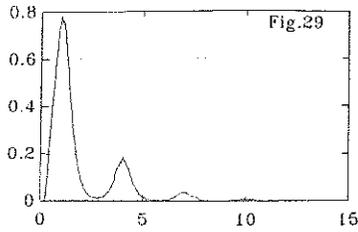


**Figure 25** Experimental result as in Figure 17 with  $P = 6$  and  $Q = 1$ .

**Figure 26** Experimental FPT density as in Figure 17 with  $P = 4$  and  $Q = 2$ .

**Figure 27** As in Figure 17 with  $P = 6$  and  $Q = 3$ .

**Figure 28** As in Figure 17 with  $P = 2$  and  $Q = 1$ .

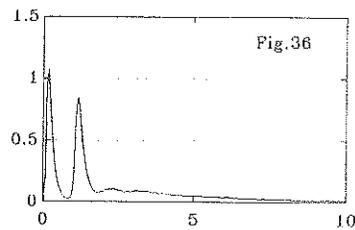
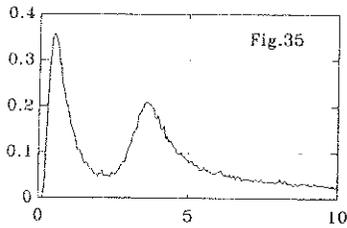
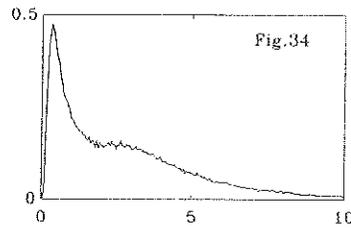
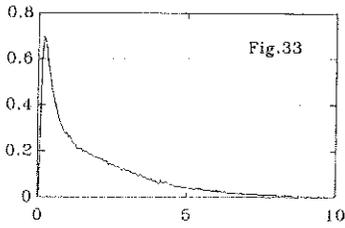


**Figure 29** As in Figure 17, with  $P = Q = 3$ .

**Figure 30** As in Figure 17, with  $P = Q = 6$ .

**Figure 31** As in Figure 17, with  $P = Q = 2$ .

**Figure 32** According to the remarks at the end of Section 9, we can note that the graphs of figure 29, 30 and 31 can be mapped onto one another by a linear time scale change since the ratios  $\lambda \equiv Q/P$  are equal for such three cases.

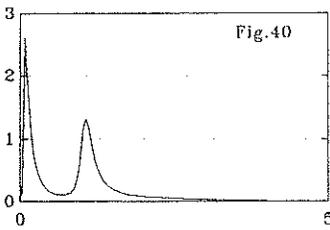
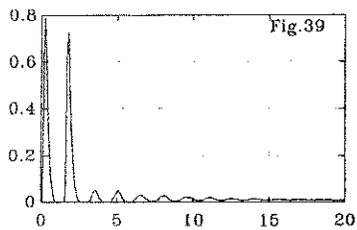
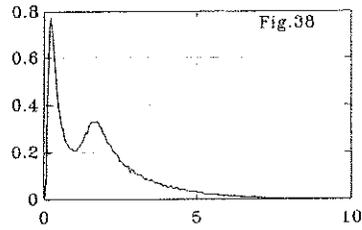
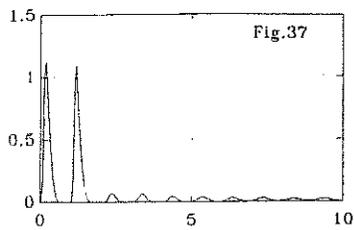


**Figure 33** Experimental FPT pdf of a stationary Gaussian process with the two-parameter damped oscillatory covariance (10.1) through a constant boundary  $S$ . Here  $\alpha = 1$  ( $P = 2\pi$ ),  $\beta = 1$  and  $S = 1$ .

**Figure 34** Simulation results as in Fig. 33 with  $\alpha = 1$  and  $\beta = 0.5$ .

**Figure 35** As in Fig. 33, with  $\beta = 0.1$ .

**Figure 36** As in Fig. 33 with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ) and  $\beta = 0.1$ .

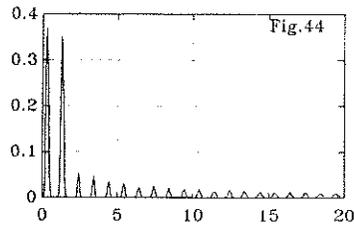
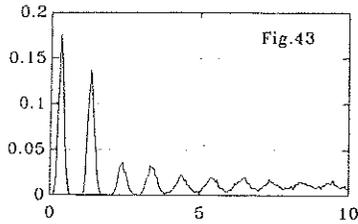
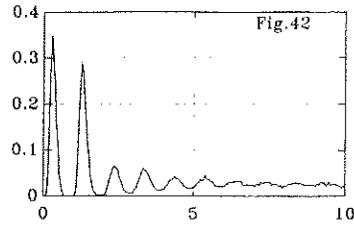
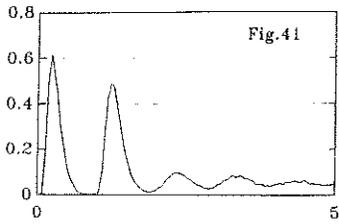


**Figure 37** Experimental result like in Fig. 33, with  $\alpha = \pi$  and  $\beta = 0.01$ .

**Figure 38** As in Fig. 33 with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ) and  $\beta = 0.5$ .

**Figure 39** As in Fig. 33, with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ) and  $\beta = 0.01$ .

**Figure 40** As in Fig. 33, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.1$  and  $S = 0.5$ .

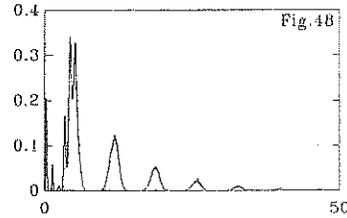
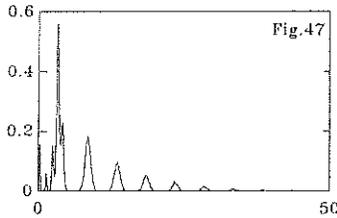
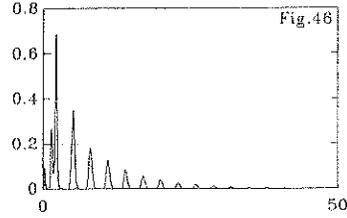
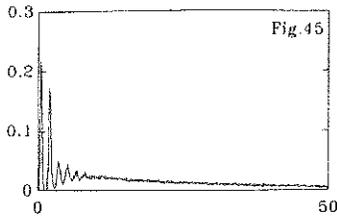


**Figure 41** As in Fig. 33, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.1$  and  $S = 1.5$ .

**Figure 42**  $\beta = 0.01$  and  $S = 2$ .

**Figure 43** As in Fig. 33, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.01$  and  $S = 2.5$ .

**Figure 44** As in Fig. 33, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.01$  and  $S = 2$ .

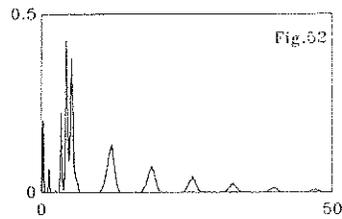
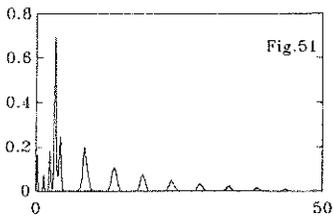
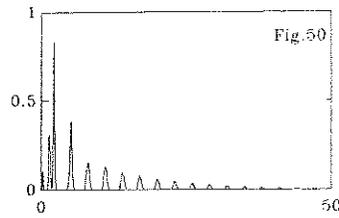
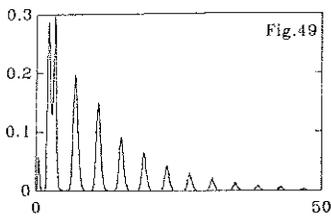


**Figure 45** As in Fig. 33, with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ),  $\beta = 1$  and  $S = 2$ .

**Figure 46** Experimental FPT pdf for a stationary Gaussian process with the two-parameter damped oscillatory covariance (10.1) through the periodic boundary  $S(t) = A + \sin(2\pi t/Q)$ . Here  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.1$  while  $A = 2$  and  $Q = 3$ .

**Figure 47** As in Fig. 46, with  $Q = 5$ .

**Figure 48** As in Fig. 46, with  $Q = 7$ .

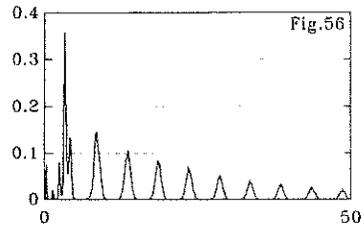
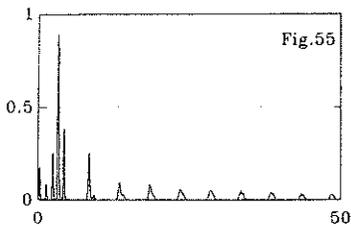
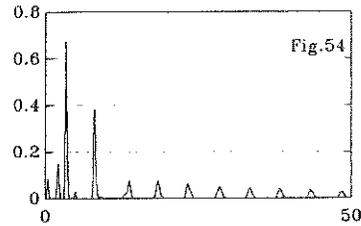
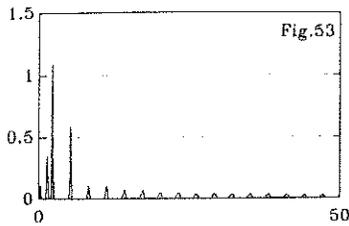


**Figure 49** As in Fig. 46, with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ),  $\beta = 0.1$ ,  $A = 2$  and  $Q = 4$ .

**Figure 50** As in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.05$ ,  $A = 2$  and  $Q = 3$ .

**Figure 51** Same as in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.05$ ,  $A = 2$  and  $Q = 5$ .

**Figure 52** Simulation results, as in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.05$ ,  $A = 2$  and  $Q = 7$ .

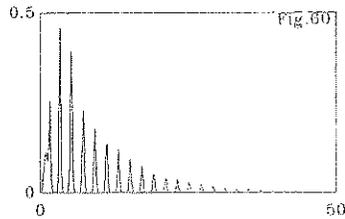
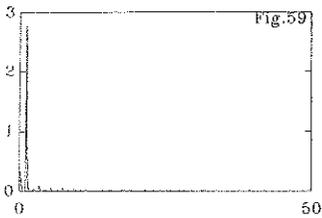
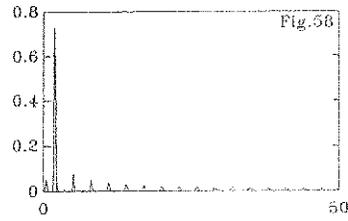
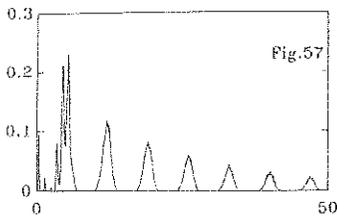


**Figure 53** As in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.01$ ,  $A = 2$  and  $Q = 3$ .

**Figure 54** As in Fig. 46, with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ),  $\beta = 0.01$ ,  $A = 2$  and  $Q = 5$ .

**Figure 55** As in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.01$ ,  $A = 2$  and  $Q = 5$ .

**Figure 56** As in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.1$ ,  $A = 2.5$  and  $Q = 5$ .

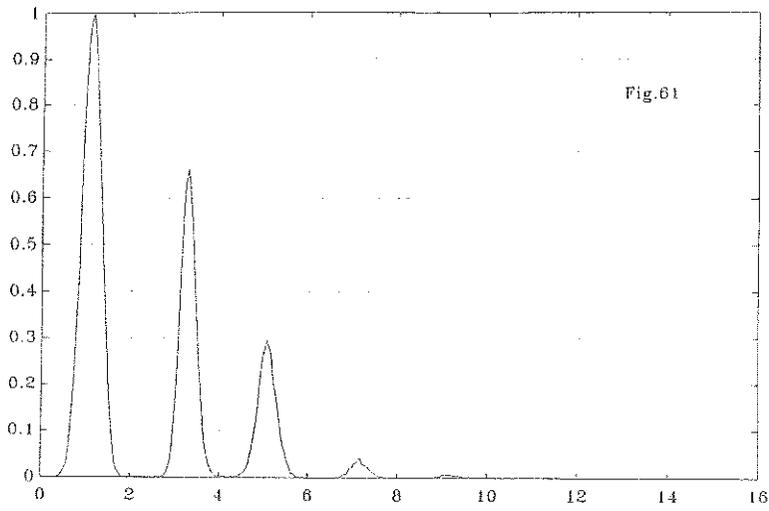


**Figure 57** Experimental FPT pdf as in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.1$ ,  $A = 2.5$  and  $Q = 7$ .

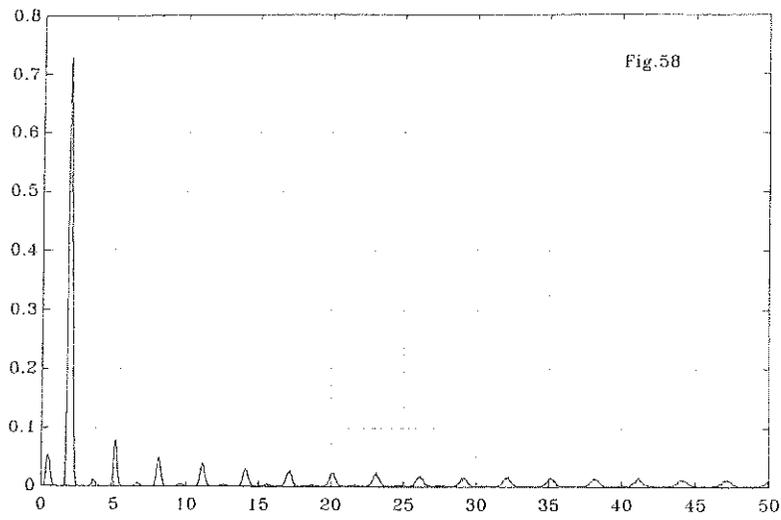
**Figure 58** As in Fig. 46, with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ),  $\beta = 0.01$ ,  $A = 2$  and  $Q = 3$ .

**Figure 59** As in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.01$ ,  $A = 1$  and  $Q = 2$ .

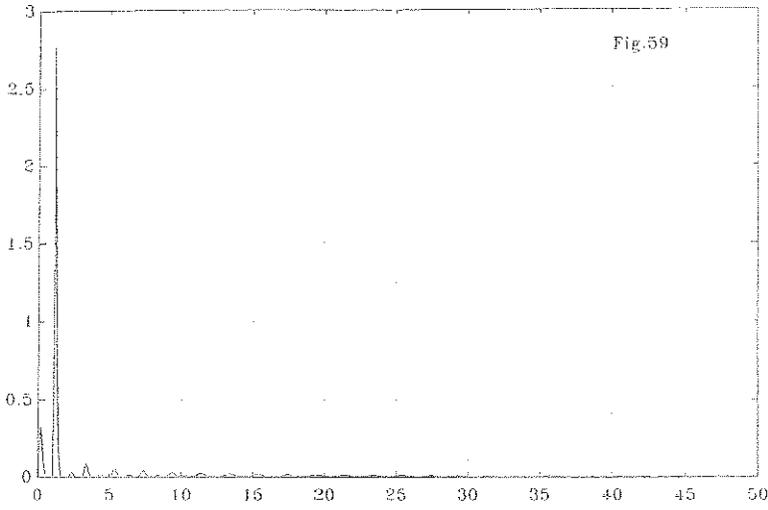
**Figure 60** As in Fig. 46, with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ),  $\beta = 0.1$ ,  $A = 2$  and  $Q = 2$ .



**Figure 61** As in Fig. 46, with  $\alpha = (2/7)\pi$  ( $P = 7$ ),  $\beta = 0.1$ ,  $A = 1$  and  $Q = 2$ .



**Figure 58** As in Fig. 46, with  $\alpha = (2/3)\pi$  ( $P = 3$ ),  $\beta = 0.01$ ,  $A = 2$  and  $Q = 3$ .



**Figure 59** As in Fig. 46, with  $\alpha = \pi$  ( $P = 2$ ),  $\beta = 0.01$ ,  $A = 1$  and  $Q = 2$ .

# Asymptotic and other properties of a territorial bio-energy model

Nota di James N. Flavin<sup>1</sup>, S. Rionero<sup>2</sup>

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero  
(Adunanza del 6 marzo 2009)

Abstract - Asymptotic and other properties of a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es. modeling the evolution of a territorial bio-energy are studied. A priori estimates of the solutions and absorbing sets are furnished. Conditions guaranteeing stability-instability of the steady state are obtained and the Turing instability is stressed.

Riassunto - Si studia l'evoluzione di un modello per la diffusione della bioenergia di un territorio retto da un sistema binario di equazioni alle derivate parziali del tipo reazione-diffusione. Si determinano: 1) stime a priori tramite il principio di massimo; 2) gli insiemi assorbenti nello spazio delle soluzioni  $L^2$ ; 3) la stabilità (instabilità) degli stati stazionari del sistema cinetico associato.

## 1 Introduction

In Landscape Ecology a landscape  $L$  is an heterogeneous large area composed of interacting ecosystems  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (landscape units) that exchange energy and matter via natural and anthropic events {Cfr. [1-4] and references therein}. To each unit  $L_i$  is associated a *bio-potentiality* and an associate *bio-energy*, obtained by multiplying the bio-potentiality by a factor depending on the morphology of  $L_i$  [3,4]. The exchange of *bio-energy* between two units  $L_i, L_j$  takes place through a barrier  $b_{ij}$  having its own characteristic permeability to the *bio-energy*. Denoting by

- $\Omega$  = territory of  $L$ ;
- $|\Omega|$  = the measure of  $\Omega$ ;
- $|\partial\Omega|$  = measure of  $\partial\Omega$ ;

<sup>1</sup>NUI-Galway. Dept. of Mathematical Physics. e-mail: james.flavin@nuigalway.ie

<sup>2</sup>Università di Napoli Federico II. Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Complesso Universitario Monte S. Angelo. Via Cinzia, 80126 Napoli - ITALIA. e-mail: rionero@unina.it

- $\Omega_1(t)$  =part of  $\Omega$  with low values of bipotentiality at the time  $t$ ;
- $|\Omega_1|$  =the measure of  $\Omega_1$ ;
- $\Omega_2$  =part of  $\Omega$  constituted by edified areas;
- $|\Omega_2|$  =measure of  $\Omega_2$ ;
- $b_{ij}$  =permeable barrier;
- $\bar{b}_{mn}$  =impermeable barrier;
- $l_{ij}$  =length of  $b_{ij}$ ;
- $\bar{l}_{mn}$  =length of  $\bar{b}_{mn}$ ;
- $h = \frac{\sum_{m,n} \bar{l}_{mn}}{|\partial\Omega|}$ ;
- $U_0 = \frac{|\Omega_2|}{|\Omega|} = \text{const.} > 0$ ;
- $h_R = \frac{|\partial\Omega_2|}{|\partial\Omega|} = \text{const} > 0$ ;
- $S(t) = \frac{|\Omega_1|}{|\Omega|}$ ;
- $V = 1 - S(t)$ ;

recently in[4,5] the following model has been introduced for the evolution of (non-dimensional) *bio-energy*  $M$

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = cM(1 - M) - h(1 - V) \\ \frac{dV}{dt} = MV(1 - V) - h_R U_0 V \end{cases} \quad (1)$$

where  $c$  is a positive constant (*connectivity constant*).

In [5] model (1) has been studied and

i) the equilibrium states  $(M_e, V_e)$  with

$$\begin{cases} cM_e(1 - M_e) - h(1 - V_e) = 0 \\ M_e V_e(1 - V_e) - h_R U_0 V_e = 0, \end{cases} \quad (2)$$

have been obtained;

- ii) the linear stability analysis of the steady states has been performed;
- ii) the results obtained have been applied, in particular, to the case when one of the equilibrium states denotes a landscape centered at Cremona (Italy).

We here reconsider the problem, generalising the model to include diffusion of the bio-energy and  $V$  along the landscape. Precisely, we consider the model

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = cM(1 - M) - h(1 - V) + \gamma_1 \Delta M \\ \frac{\partial V}{\partial t} = MV(1 - V) - h_R U_0 V + \gamma_2 \Delta V \end{cases} \quad (3)$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = -h + cM + hV + \gamma_1 \Delta M - cM^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} = -h_R U_0 V + \gamma_2 \Delta V + MV(1 - V) \end{cases} \quad (4)$$

$\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) being positive constants (diffusion coefficients), under the initial conditions

$$M(\mathbf{x}, 0) = M_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad V(\mathbf{x}, 0) = V_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5)$$

and boundary conditions [6]

$$\begin{cases} \beta_1 M + (1 - \beta_1) \nabla M \cdot \mathbf{n} = \beta_1 M_e \\ \beta_2 V + (1 - \beta_2) \nabla V \cdot \mathbf{n} = \beta_2 V_e \end{cases} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (6)$$

$\beta_i$  being constants, with

$$\beta_i \in [0, 1], \quad \beta_i \neq 0, \quad \delta_i^2 = \frac{\beta_i}{1 - \beta_i}, \quad \text{for } \beta_i \neq 1 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

and  $\mathbf{n}$  being the outward unit normal to  $\partial\Omega$ .

The basic assumptions of the model (1) are carefully described in [4-5]. Concerning the model (4)-(6), we remark that the diffusion phenomena are very relevant in any Landscape in which there are units of populations, plants and edified areas. In fact in these cases the diffusion phenomena, via the growth of  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , influence  $L$ . Our aim is to study, according to the model (4)-(6), the long time behaviour of the bio-energy. In particular, our aim is to determine conditions:

- i) either guaranteeing finite changes in, or the full preservation of, the bio-energy;
- ii) which produce meaningful growth of the bio-energy.

Therefore, concerning aim i), we determine conditions guaranteeing the existence either of absorbing sets [14-16], or the stability of equilibrium states. Concerning ii), we determine conditions producing instability of the equilibrium states and, in particular, Turing instability [12], [17]. Therefore in the present paper, we will be concerned – inter alia – with the influence of the diffusion phenomena on the equilibrium states  $(M_e, V_e)$  of (1). We disregard the possible equilibrium states of (4)-(6) depending on the spatial variables and consider only constant steady states of (4)-(6). Since Neumann boundary conditions are not allowed (Cfr. Section 9), conditions (6) appear to be the most general (linear) boundary conditions [6] that are appropriate. In particular, these reduce to Dirichlet boundary conditions when  $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 1$ .

We remark that – although the equations (4)-(7) and the kinetic equation (1) have the same constant equilibrium states – the influence of diffusion phenomena can be very relevant. In fact a steady state unstable for (1) can become stable for (4)-(7), and viceversa a steady state stable for (1) can become unstable for (1)-(7) (Turing instability, Sect. 7).

The plan of the paper is the following one. Section 2 is devoted to some preliminaries. In particular the solutions of (2) are recalled together with the functional space in which (4)-(6) are studied. Next (Section 3), some a priori estimates for the positive solutions of (4)-(6) are obtained. In particular, we show that

$$\begin{cases} 0 < V_0 \leq 1 \\ 0 < M_0 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq 1 \\ 0 \leq M(\mathbf{x}, t) \leq 1 \end{cases} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Next, the existence of absorbing sets of the solution in the  $L_2(\Omega)$ -norm, is obtained (Section 4). Sections 6-7 are devoted to linear stability/instability of the steady states. In particular, the influence of diffusion on the stability and the Turing instability is considered. In Section 8 the nonlinear stability of the equilibrium state corresponding to the Cremona's (Italy) Landscape is studied. The last section (Section 9) is devoted to some final remarks. The paper ends with an appendix in which a suitable inequality is obtained.

## 2 Preliminaries

The solutions of (2) have been found in [5]. For

$$h < \frac{c}{4}, \quad (8)$$

they are given by

$$\begin{cases} M_{e,1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4h/c}), & V_{e,1} = 0 \\ M_{e,2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4h/c}), & V_{e,2} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Further positive critical points  $(M_e, V_e)$  with  $V_e \neq 0$ , exist only if

$$M_e > h_R U_0 \quad (10)$$

and then

$$V_e = 1 - \frac{h_R U_0}{M_e}, \quad (11)$$

where  $M_e$  has to be a positive root of the cubic equation

$$M^3 - M^2 + H = 0 \quad (12)$$

with

$$H = hh_R U_0. \quad (13)$$

It has been found [5] that for

$$H > \frac{4}{27} \quad (14)$$

(12) admits only the positive root

$$\begin{cases} M_{e,3} = \frac{1}{3} + (p+q)^{1/3} + (p-q)^{1/3} > h_R U_0 \\ p = \frac{1}{27} - \frac{H}{2}, \quad q = \left( \frac{H^2}{4} - \frac{H}{27} \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (15)$$

For  $H \leq \frac{4}{27}$ , the roots of (15) are all real, but one is negative. Denoting by  $M_{e,4}$  the negative root and by  $M_{e,5}, M_{e,6} (> M_{e,5})$  the positive ones, these last two generate two positive critical points  $(M_{e,k}, V_{e,k})$  ( $k = 5, 6$ ) only if

$$\inf(M_{e,5}; M_{e,6}) > h_R U_0. \quad (16)$$

Since a landscape is characterized by strong interactions through the landscape units, the equilibrium positions with low values of connectivity  $c$  (compared to  $h, H_R, U_0$ ) appear to be of less interest. For this reason, one disregards the case

$$H > \frac{4}{27} \Leftrightarrow c < \frac{4}{27} h h_R U_0 \tag{17}$$

and concentrates attention on the other positive critical points.

In the sequel we will study the i.b.v.p. (4)-(6) with  $(M_e, V_e)$  given by each one of the positive solutions of (2). Further we will denote by

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the scalar product of  $L^2(\Omega)$ ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$  the scalar product of  $L^2(\partial\Omega)$ ;
- $\| \cdot \|$  the norm of  $L^2(\Omega)$ ;
- $\| \cdot \|_{\partial\Omega}$  the norm of  $L^2(\partial\Omega)$ ;
- $W^{1,2}(\Omega, \beta_i)$ , ( $i = 1, 2$ ) the functional space such that

$$\varphi \in W^{1,2}(\Omega, \beta_i) \Rightarrow \{ \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\partial\Omega), (6)-(7) \text{ hold, with } M_e = V_e = 0 \}.$$

**Remark 1** - *We recall that*

- i) in  $W^{1,2}(\Omega, \beta_i)$  for  $\Omega$  of class  $C^p$  ( $p > 2$ ) having the interior cone property, the following inequality holds [6, 7]*

$$\|\nabla\varphi\|^2 + \|\delta_i\varphi\|_{\partial\Omega}^2 \geq \bar{\alpha}_i \|\varphi\|^2 \tag{18}$$

*with  $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i(\Omega, \beta_i) = \text{const.} > 0$ ;*

- ii)  $\bar{\alpha}_i$  is the lowest eigenvalue of*

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \tag{19}$$

*in  $W^{1,2}(\Omega, \beta_i)$  (i.e. the principal eigenvalue of  $-\Delta$ ).*

**Remark 2** - *The positive equilibrium states  $(M_{e,i}, V_{e,i})$  satisfy the condition*

$$\max(M_{e,i}, V_{e,i}) \leq 1, \quad \forall i. \tag{20}$$

*In fact, this follows from (9) for  $i = 1, 2$ , and from (11)-(12) in other cases.*

### 3 A priori estimates

We assume that  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  is an open bounded set having the interior cone property with a  $C^{2+\eta}$  surface  $\partial\Omega$  ( $\eta = \text{const.} > 0$ ) {Cfr. [8], pp. 625}. Further here and in the sequel, only the positive smooth solutions of (4)-(6) are taken into account.

We denote by  $T > 0$  an arbitrary fixed time and by  $\Omega_T$  the parabolic cylinder  $\Omega \times [0, T]$ . As usual, we interpret  $\Omega_T$  as the parabolic interior of  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  i.e.  $\Omega_T$  includes the top  $\Omega \times \{t = T\}$ . Hence the parabolic boundary  $\Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T$ , includes the bottom and the vertical sides, but not the top. Further  $C^{1,2}(\bar{\Omega}_T)$  is the set of all the functions in  $\bar{\Omega}_T$ , continuous together with their first (spatial and temporal) derivatives and second spatial derivatives.

**Theorem 1** - Let  $(M, V) \in [C^{1,2}(\bar{\Omega}_T)]^2$  be a positive solution of (4)-(6). Then

$$V \leq V_* = \max\{\max_{\bar{\Omega}} V_0(\mathbf{x}), 1, V_e\}. \tag{21}$$

**Proof.** Let

$$\begin{cases} M_* = \max_{\Omega_T} M = M(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \\ V_* = \max_{\Omega_T} V = V(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}). \end{cases} \tag{22}$$

Since

$$\gamma_2 \Delta V - V_t = h_R U_0 V + MV(V - 1) \tag{23}$$

it turns out that

$$\gamma_2 \Delta V - V_t > (h_R U_0 - M_*)V \tag{24}$$

i.e.

$$\gamma_2 \Delta V - h_1 V - V_t > 0 \tag{25}$$

with

$$h_1 = h_R U_0 - M_* . \tag{26}$$

Because of the  $C^{2+\eta}$  property ( $\eta > 0$ ) of  $\partial\Omega$ ,  $\Omega$  verifies at any point  $\bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$  the interior ball property, i.e. there exists an open ball  $B(\bar{\mathbf{x}}) \in \Omega$  with  $\bar{\mathbf{x}} \in \partial B$ .

Then it easily follows that  $\bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$  implies  $\left(\frac{dV}{d\mathbf{n}}\right)_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})} > 0$  and hence  $V(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) <$

$V_e$ . In fact consider the ball  $B(\bar{\mathbf{x}})$ . Then  $h_1 \geq 0$ , in view of the Hopf's Lemma, implies

$$\left(\frac{dV}{d\mathbf{n}}\right)_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})} > 0. \tag{27}$$

Analogously, if  $h_1 < 0$ , setting {Cfr. [7], pag. 175, (ii)}

$$V = V_1 e^{\lambda t} \tag{28}$$

one obtains

$$\gamma_1 \Delta V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} - (h_1 + \lambda)V_1 \geq 0. \tag{29}$$

On choosing

$$\lambda > -h_1 \tag{30}$$

one obtains, once again, that  $\bar{x} \in \partial\Omega$ , for the Hopf's Lemma implies

$$\left(\frac{dV_1}{d\mathbf{n}}\right)_{(\bar{x}, \bar{t})} > 0$$

and hence

$$\left(\frac{dV}{d\mathbf{n}}\right)_{(\bar{x}, \bar{t})} = \left(\frac{dV_1}{d\mathbf{n}}\right)_{(\bar{x}, \bar{t})} e^{\lambda \bar{t}} > 0. \tag{31}$$

Passing to the interior of  $\bar{\Omega}_T$ , (4)<sub>2</sub> implies

$$V_t + h_R U_0 V(t) - \gamma_2 \Delta V = MV(1 - V) \tag{32}$$

and hence

$$[MV(1 - V)]_{(\bar{x}, \bar{t})} > 0 \tag{33}$$

i.e.

$$V(\bar{x}, \bar{t}) < 1. \tag{34}$$

**Theorem 2** - Let  $(M, V) \in [C^{1,2}(\bar{\Omega}_T)]^2$  be a positive solution of (4)-(5) with

$$0 \leq V_0(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{35}$$

Then

$$M \leq M_* = \max\{\max_{\Omega} M_0, 1, M_e\}. \tag{36}$$

**Proof.** In any ball  $B(\mathbf{x}) \in \Omega$  with  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  it follows that

$$\gamma_1 \Delta M + cM - M_t = cM^2 + h(1 - V). \tag{37}$$

In view of (21) and (35), from (37) then one obtains

$$\gamma_1 \Delta M + cM - M_t > 0 \tag{38}$$

and hence – following step by step the procedure used previously in the case  $h_1 < 0$  – one obtains that  $\bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$  implies

$$\left(\frac{dM}{d\mathbf{n}}\right)_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})} > 0 \Rightarrow M(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) < M_e. \quad (39)$$

Analogously, passing to the interior of  $\bar{\Omega}_T$ , (37) implies

$$cM(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})[1 - M(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})] > 0 \Rightarrow M(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) < 1. \quad (40)$$

#### 4 Absorbing sets

We will refer here and in the sequel to the positive solutions of (4)-(6).

**Lemma 1** - Let  $\Psi_e$  be a positive constant,  $\varphi \in W^{1,2}(\Omega, \beta)$  and

$$\Psi = \varphi + \Psi_e, \quad \beta\Psi + (1 - \beta)\nabla\Psi \cdot \mathbf{n} = \beta\Psi_e \quad \text{on } \partial\Omega \quad (41)$$

with  $\delta^2 = \frac{\beta}{1 - \beta} \in L(\partial\Omega)$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\beta \in [0, 1]$ . Then

$$2\langle\Psi, \Delta\Psi\rangle \leq \Psi_e^2 [\langle 1, \delta^2 \rangle_{\partial\Omega} + \bar{\alpha}|\Omega|] - \frac{\bar{\alpha}}{2}\|\Psi\|^2 \quad (42)$$

$\bar{\alpha}$  being the principal eigenvalue of

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \beta\varphi + (1 - \beta)\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (43)$$

The proof can be found in [13]. For the sake of completeness a sketch of the proof is given in the appendix.

Let us now adopt the energy

$$E = \|M\|^2 + \|V\|^2 \quad (44)$$

as a measure, in the phase space, of the distance from the origin  $(0, 0)$ . By virtue of (4), along the solutions, it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \leq \begin{cases} c\|M\|^2 + h\langle M, V \rangle + \gamma_1\langle M, \Delta M \rangle - c\langle 1, M^3 \rangle - h_R U_0 \|V\|^2 \\ + \gamma_2\langle V, \Delta V \rangle + \langle M, V^2 \rangle - \langle M, V^3 \rangle. \end{cases} \quad (45)$$

Since

$$\begin{cases} V^2 = V^{1/2}V^{3/2} \leq \frac{1}{2\varepsilon}V + \frac{\varepsilon}{2}V^3, & M^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon_1}M + \frac{\varepsilon_1}{2}M^3 \\ \langle M, V^2 - V^3 \rangle \leq \frac{1}{2\varepsilon}\langle M, V \rangle + \left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right)\langle M, V^3 \rangle \\ \|M\|^2 - \langle 1, M^3 \rangle \leq \frac{1}{2\varepsilon_1}\langle 1, M \rangle + \left(\frac{\varepsilon_1}{2} - 1\right)\langle 1, M^3 \rangle \end{cases} \quad (46)$$

with  $\varepsilon$  and  $\varepsilon_1$  positive constants, choosing

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 2 \quad (47)$$

it turns out that

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \leq h_1 \langle M, V \rangle - h_R U_0 \|V\|^2 + \frac{c}{4} \langle 1, M \rangle + \gamma_1 \langle M, \Delta M \rangle + \gamma_2 \langle V, \Delta V \rangle \quad (48)$$

with

$$h_1 = \left( h + \frac{1}{4} \right). \quad (49)$$

On the other hand one obtains

$$\begin{cases} h_1 \langle M, V \rangle \leq \frac{\varepsilon_3}{2} h_1^2 \|V\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|M\|^2 \\ \frac{c}{4} \langle 1, M \rangle \leq \frac{c^2}{32\varepsilon_4} |\Omega| + \frac{\varepsilon_4}{2} \|M\|^2, \end{cases} \quad (50)$$

therefore for

$$\frac{\varepsilon_3}{2} h_1^2 = h_R U_0, h_2 = \frac{h_1^2}{2h_R U_0} \quad (51)$$

one obtains

$$\frac{dE}{dt} \leq \frac{c^2}{16\varepsilon_4} |\Omega| + (\varepsilon_4 + h_2) \|M\|^2 + 2\gamma_1 \langle M, \Delta M \rangle + 2\gamma_2 \langle V, \Delta V \rangle, \quad (52)$$

and - in view of (42) - it follows that

$$\frac{dE}{dt} \leq \begin{cases} \frac{c^2}{16\varepsilon_4} |\Omega| + \gamma_1 M_e^2 [\langle 1, \delta_1^2 \rangle_{\partial\Omega} + \bar{\alpha}_1 |\Omega|] + \gamma_2 V_e^2 [\langle 1, \delta_2^2 \rangle_{\partial\Omega} + \bar{\alpha}_2 |\Omega|] \\ - \left[ \frac{\gamma_1 \bar{\alpha}_1}{2} - (\varepsilon_4 + h_2) \right] \|M\| - \frac{\gamma_2 \bar{\alpha}_2}{2} \|V\|^2 \end{cases} \quad (53)$$

**Theorem 3** - Let

$$d = \gamma_1 \bar{\alpha}_1 - 2h_2 > 0 \quad (54)$$

and set

$$\begin{cases} l = \frac{c^2}{4d} |\Omega| + \gamma_1 M_e^2 (\langle 1, \delta_1^2 \rangle_{\partial\Omega} + \bar{\alpha}_1 |\Omega|) + \gamma_2 V_e^2 (\langle 1, \delta_2^2 \rangle_{\partial\Omega} + \bar{\alpha}_2 |\Omega|) \\ l_1 = \frac{1}{2} \inf \left( \frac{3}{2} d, \gamma_2 \bar{\alpha}_2 \right). \end{cases} \quad (55)$$

Then any set

$$S(\delta) = \left\{ (M, V) : \|M\|^2 + \|V\|^2 \leq (1 + \delta) \frac{l}{l_1} \right\} \quad (56)$$

$\delta$  being an arbitrary positive constant, is an absorbing set.

**Proof.** Choosing

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{4} d \quad (57)$$

by virtue of (53)-(55), one obtains

$$\frac{dE}{dt} = -l_1 E + l. \quad (58)$$

First of all let us observe that a trajectory starting initially in  $S(\delta)$ , can leave  $S(\delta)$  only if there exists an instant  $t^*$  such that

$$E(t^*) = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \frac{l}{l_1}, \quad \left(\frac{dE}{dt}\right)_{(t=t^*)} > 0. \quad (59)$$

But, in view of (58) one obtains

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{(t=t^*)} < l - l_1 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \frac{l}{l_1} = \frac{\delta}{2} l < 0. \quad (60)$$

$S(\delta)$  is therefore invariant. Integrating (58), one obtains

$$E \leq E_0 e^{-l_1 t} + \frac{l}{l_1}. \quad (61)$$

Let  $\mathcal{I}$  be a bounded set of the phase space. Then there exists a positive constant  $p$  such that

$$\sup_{\mathcal{I}} E < p. \quad (62)$$

From

$$pe^{-l_1 t} + \frac{l}{l_1} = (1 + \delta) \frac{l}{l_1} \quad (63)$$

it follows that at any instant  $t > \bar{t}$  with

$$\bar{t} = \frac{1}{l_1} \log \frac{pl_1}{\delta l}$$

any trajectory starting initially in  $\mathcal{I}$ , belongs to  $S(\delta)$ .

**Remark 3** - *We remark that while Theorems 1-2 give estimates of the solutions depending on the initial data, Theorem 3 gives, for  $t \rightarrow \infty$ , an estimate independent of the initial data.*

### 5 Linear stability of the equilibrium states

Let  $(M_e, V_e)$  be an equilibrium state. Setting

$$M = M_e + \alpha m, \quad V = V_e + \beta v \quad (64)$$

$\alpha, \beta$  being scalings constants to be chosen later, it easily follows that

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = b_{11}m + \frac{b_{12}}{\mu}v + f_1^* + f^* \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu b_{21}m + b_{22}v + g_1^* + g^* \end{cases} \quad (65)$$

with

$$\begin{cases} f_1^* = \gamma_1(\Delta m + \bar{\alpha}_1 m), & g_1^* = \gamma_2(\Delta v + \bar{\alpha}_2 v), \\ f^* = -\frac{c}{\alpha}(\alpha^2 m^2) = -\alpha c m^2, & \mu = \frac{\alpha}{\beta}, \\ g^* = -\mu(M_e \frac{\beta}{\mu} v^2 + \beta^2 m v^2 + 2\beta V_e m v), \\ b_{11} = c(1 - 2M_e) - \bar{\alpha}_1 \gamma_1, & b_{12} = h, \\ b_{21} = M_e(1 - 2V_e) - h_R U_0, & b_{22} = V_e(1 - V_e) - \bar{\alpha}_2 \gamma_2, \end{cases} \quad (66)$$

under the boundary conditions

$$\begin{cases} \delta_1^2 m + \nabla m \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \delta_2^2 v + \nabla v \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (67)$$

Introducing the functional [10,11]

$$W = \frac{1}{2} \left[ A(\|m\|^2 + \|v\|^2) + \|b_{11}v - \mu b_{21}m\|^2 + \left\| \frac{b_{12}v}{\mu} - b_{22}m \right\|^2 \right] \quad (68)$$

and setting

$$A = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad I = b_{11} + b_{22} \quad (69)$$

the time derivative of  $W$  along the solutions is given by

$$\frac{dW}{dt} = AI(\|m\|^2 + \|v\|^2) + \Psi_1^* + \Psi^* \quad (70)$$

with

$$\begin{cases} \Psi_1^* = \langle \alpha_1^* m - \alpha_3^*, f_1^* \rangle + \langle \alpha_2^* v - \alpha_3^* m, g_1^* \rangle, \\ \Psi^* = \langle \alpha_1^* m - \alpha_3^*, f^* \rangle + \langle \alpha_2^* v - \alpha_3^* m, g^* \rangle, \\ \alpha_1^* = A + \mu^2 b_{21}^2 + b_{22}^2, \quad \alpha_2^* = A + b_{11}^2 + \frac{b_{12}^2}{\mu}, \quad \alpha_3^* = \mu b_{11} b_{21} + \frac{1}{\mu} b_{12} b_{22}. \end{cases} \quad (71)$$

There follows a list of theorems together with their proofs.

**Theorem 4** - Let  $b_{11}b_{21}b_{12}b_{22} < 0$  and

$$A > 0, \quad I < 0. \quad (72)$$

Then  $(M_e, V_e)$  is linearly exponentially stable.

**Proof.** Linearizing (65), it follows that (70) reduces to

$$\frac{dW}{dt} = AI(\|m\|^2 + \|v\|^2) + \Psi^*. \quad (73)$$

On choosing

$$\mu = \left| \frac{b_{12}b_{22}}{b_{11}b_{21}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (74)$$

it follows that

$$\alpha_3 = 0 \quad (75)$$

and, by virtue of (18),

$$\Psi^* = \alpha_1^* \langle m, f_1^* \rangle + \alpha_2^* \langle v, g_1^* \rangle < 0. \quad (76)$$

Therefore - in view of (72)-(76)- one obtains

$$\frac{dW}{dt} \leq -|A|(\|m\|^2 + \|v\|^2). \quad (77)$$

On the other hand  $A > 0$  implies that  $W$  is positive definite and equivalent to  $\|m\|^2 + \|v\|^2$  i.e.

$$k_1 W \leq \|m\|^2 + \|v\|^2 \leq k_2 W \quad (78)$$

with  $k_1 < k_2$  positive constants. Then it easily follows that

$$W \leq W_0 e^{-|A|k_3 t}. \quad (79)$$

**Theorem 5** - *Let (72) hold together with*

$$b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} > 0, \quad b_{12}b_{21} > 0. \quad (80)$$

*Then  $(M_e, V_e)$  is linearly asymptotically stable.*

**Proof.** Choosing

$$\mu = \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \quad (81)$$

it follows that

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = b_{11}m \pm \sqrt{b_{12}b_{21}}v + f_1^* \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \pm \sqrt{b_{12}b_{21}}m + b_{22}v + g_1^* \end{cases} \quad (82)$$

and hence, since  $\{\langle m, f_1^* \rangle < 0, \langle v, g_1^* \rangle < 0\}$ , one obtains

$$\frac{dE}{dt} \leq b_{11}\|m\|^2 + 2\sqrt{b_{12}b_{21}}|\langle m, v \rangle| + b_{22}\|v\|^2 \quad (83)$$

with

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|m\|^2 + \|v\|^2). \quad (84)$$

In view of

$$I = b_{11} + b_{22} < 0, \quad b_{11}b_{22} > 0 \quad (85)$$

it turns out that

$$\frac{dE}{dt} \leq -|b_{11}|\|m\|^2 + 2\sqrt{b_{12}b_{21}}|\langle m, v \rangle| - |b_{22}|\|v\|^2. \quad (86)$$

On the other hand

$$A = |b_{11}b_{22}| - b_{21}b_{12} > 0 \rightarrow \sqrt{|b_{12}b_{21}|} = \varepsilon\sqrt{|b_{11}b_{22}|} \quad (87)$$

with  $0 < \varepsilon < 1$  and easily it follows that

$$\frac{dE}{dt} \leq -\delta E \quad (88)$$

with

$$\delta = 2(1 - \varepsilon) \inf(|b_{11}|, |b_{22}|)$$

and hence

$$E \leq E_0 e^{-\delta t}. \quad (89)$$

**Theorem 6** - Let (71) hold together with

$$b_{12}b_{21} < 0, \quad b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} < 0. \quad (90)$$

Then  $(M_e, V_e)$  is linearly asymptotically stable.

**Proof.** Choosing

$$\mu = \sqrt{\left| \frac{b_{12}}{b_{21}} \right|} \quad (91)$$

it follows that

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} = b_{11}m \pm \sqrt{|b_{12}b_{21}|}v + f^* \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mp \sqrt{|b_{12}b_{21}|}m + b_{22}v + g^* \end{cases} \quad (92)$$

where the first signs hold in the case  $b_{12} > 0$  and the second signs hold in the case  $b_{21} > 0$ . Then - since  $b_{11} < 0$ ,  $b_{22} < 0$  - it turns out that

$$\frac{dE}{dt} \leq -|b_{11}| \|u\|^2 - |b_{22}| \|v\|^2 \leq -d_1 E \quad (93)$$

with  $d_1 = 2 \inf(|b_{11}|, |b_{22}|)$ .

Let us consider now the case  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  (i.e.  $\delta_1^2 = \delta_2^2 = \delta^2 = \frac{\beta}{1-\beta}$ ). We

denote by  $\{\varphi_n\}$  the sequence of the eigenfunctions and by  $\{\alpha_n\}$  the sequence of the corresponding eigenvalues of the spectral problem

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \delta^2\varphi + \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (94)$$

with  $\bar{\alpha} = \alpha > 0$ , principal eigenvalue. Then the linear stability can be studied with respect to the perturbations

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}) \quad (95)$$

derivable, term by term, once with respect to  $t$  and twice with respect to the spatial variables. We remark that

$$\Delta m = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}), \quad \Delta v = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Y_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}). \quad (96)$$

Setting

$$b_{11}^{(n)} = c(1 - 2M_e) - \alpha_n \gamma_1, \quad b_{22}^{(n)} = V_e(1 - V_e) - \alpha_n \gamma_2, \quad (97)$$

linearizing (69), for  $\mu = 1$ , one obtains

$$\begin{cases} \frac{dX_n}{dt} = b_{11}^{(n)} X_n + b_{12} Y_n \\ \frac{dY_n}{dt} = b_{21} X_n + b_{22}^{(n)} Y_n. \end{cases} \quad (98)$$

Therefore the linear stability of  $(M_e, V_e)$  is guaranteed by the stability of the zero solution of (98),  $\forall n \geq 1$ . On the contrary the instability is guaranteed by the instability of the zero solution of (98) for only one  $n \geq 1$ . Setting

$$\begin{cases} I_n = b_{11}^{(n)} + b_{22}^{(n)} = \lambda_{1n} + \lambda_{2n}, \\ A_n = b_{11}^{(n)} b_{22}^{(n)} - b_{12} b_{21} = \lambda_{1n} \lambda_{2n}. \end{cases} \quad (99)$$

$\lambda_{1n}, \lambda_{2n}$  being the eigenvalues of  $\begin{pmatrix} b_{11}^{(n)} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$ , given by

$$\lambda_{1n} \lambda_{2n} = \frac{-I_n \pm \sqrt{I_n^2 - 4A_n}}{2}, \quad (100)$$

one obtains

**Theorem 7** - *The equilibrium solution  $(M_e, V_e)$  is linearly stable if*

$$I_n < 0, \quad A_n > 0 \quad \forall n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (101)$$

Viceversa it is unstable either if there exists a number  $\bar{n} \in \{1, 2, \dots\}$  such that

$$I_{\bar{n}} > 0 \quad (102)$$

or

$$A_{\bar{n}} < 0. \quad (103)$$

Setting

$$\begin{cases} I_0 = (I)_{\gamma_1=\gamma_2=0} = a_1 + a_4, A_0 = (A)_{\gamma_1=\gamma_2=0} = a_1 a_4 - a_2 a_3 \\ a_1 = (b_{11})_{\gamma_1=0}, a_2 = b_{12}, a_3 = b_{21}, a_4 = (b_{22})_{\gamma_2=0} \end{cases} \quad (104)$$

it follows that

$$I_n = I_0 - (\gamma_1 + \gamma_2)\alpha_n, \quad A_n = \gamma_1 \gamma_2 \alpha_n^2 - (\gamma_1 a_4 + \gamma_2 a_1)\alpha_n + A_0 \quad (105)$$

and hence

$$I_n < I \quad \forall n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (106)$$

Further

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \geq \frac{\gamma_1 a_4 + \gamma_2 a_1}{\gamma_1 \gamma_2} \quad (107)$$

implies

$$A_n \geq A_0, \quad \forall n \geq 1. \quad (108)$$

**Theorem 8 - Let**

$$I_0 > 0, \quad A_0 > 0, \quad \bar{\alpha} > \max\left(\frac{\gamma_1 a_4 + \gamma_2 a_1}{\gamma_1 \gamma_2}, \frac{I}{\gamma_1 + \gamma_2}\right). \quad (109)$$

Then  $(M_e, V_e)$ , linearly unstable in the absence of diffusion, is stabilized by diffusion.

**Proof.** In fact (109) imply (101).

**Theorem 9 - Let**

$$I_0 < 0, \quad A_0 < 0, \quad \gamma_1 a_4 + \gamma_2 a_1 < 0. \quad (110)$$

Then  $(M_e, V_e)$ , linearly unstable in absence of diffusion, is stabilized by diffusion.

**Proof.** In fact - by virtue of (110) - the roots of  $A_n = 0$  are both negative, hence  $A_n > 0, \forall n \geq 1$ . On the other hand,  $I_0 < 0$  implies  $I_n < 0, \forall n \geq 1$ .

**Theorem 10** - *Let*

$$I_0 < 0, \quad A_0 > 0, \quad \gamma_1 \neq \gamma_2, \quad A_{\bar{n}} < 0 \quad \bar{n} \geq 1. \quad (111)$$

*Then  $(M_e, V_e)$ , linearly stable in absence of diffusion, is destabilized by diffusion (Turing effect).*

**Proof.** Cfr Theorem 7. We only remark that in view of (111)<sub>1</sub>,  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  is necessary for the existence of a positive  $\bar{n} \in N(> 1)$  such that  $A_{\bar{n}} < 0$ . For further details on the Turing effect we refer to [12].

**Remark 4** - *We observe that, in the case  $(\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0)$ , one obtains*

$$A_n = -\gamma_1 a_4 \alpha_n + A_0 \quad (112)$$

*and the Turing instability requires*

$$I_0 < 0, \quad A_0 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \alpha_{\bar{n}} > \frac{A_0}{\gamma_1 a_4}. \quad (113)$$

## 6 Linear stability in the case $H = hh_R U_0 < 4/27$

Since a landscape is characterized by strong interactions through the landscape units, the equilibrium positions with low values of connectivity  $c$  (compared to  $h, h_R, U_0$ ) appear to be of less interest. For this reason, one disregards the case

$$H > \frac{4}{27} \Leftrightarrow c < \frac{4}{27} h h_R U_0 \quad (114)$$

and concentrates attention on the other positive critical points. We here consider the stability - instability of the equilibrium states with low bio-potentiality. For  $V_e = 0$ , (104) imply

$$I_0 = c(1 - 2M_e) \quad A_0 = -h(M_e - h_R U_0). \quad (115)$$

Therefore

$$\frac{1}{2} < M_{e,k} < h_R U_0 \quad (k = 1, 2) \quad (116)$$

imply stability of  $(M_{e,k}, 0)$  while either

$$M_{e,k} < \frac{1}{2} \quad (117)$$

or

$$M_{e,k} > h_R U_0 \quad (118)$$

imply instability. In the presence of diffusion one obtains

$$\begin{cases} I_n = c(1 - 2M_e) - (\gamma_1 + \gamma_2)\alpha_n \\ A_n = \gamma_1\gamma_2\bar{\alpha}_n^2 - c(1 - 2M_e)\gamma_2\alpha_n - h(M_e - h_R U_0) \end{cases} \quad (119)$$

and in view of (107)-(108) and (119)<sub>1</sub>, it follows that

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_1 \bar{\alpha}}{c} \right) < M_{e,k} < h_R U_0 \quad (k = 1, 2) \quad (120)$$

imply instability. Concerning the *Turing instability*, it easily follows that, in the case at hand, it is not allowed. In the case

$$\frac{\gamma_1\gamma_2\bar{\alpha}^2}{h} + h_R U_0 > M_{e,k} > h_R U_0 > \frac{1}{2} \quad (121)$$

$(M_{e,2}, 0)$  - linearly unstable in the absence of diffusion - is stabilized by diffusion. In fact, in this case (101)<sub>1</sub> is satisfied ( $\forall n$ ) and (119)<sub>2</sub> gives

$$A_n > \gamma_1\gamma_2\alpha_n^2 - h(M_e - h_R U_0) > \gamma_1\gamma_2\bar{\alpha}^2 - h(M_e - h_R U_0); \quad (122)$$

hence (121)<sub>1</sub> implies (101)<sub>2</sub>  $\forall n \geq 1$ .

## 7 Linear stability in the case $H \geq \frac{4}{27}$

Let us begin by remarking that the condition

$$M_{e,k} < h_R U_0, \quad k = 1, 2 \quad (123)$$

excludes the existence of the equilibrium solutions  $(M_{e,k}, V_{e,k})$  with  $k = 5, 6$ . We here consider specifically the case <sup>3</sup>

$$h_R = 0.44, \quad U_0 = 0.13, \quad c = 0.454, \quad h = 0.675. \quad (124)$$

One easily finds  $H < \frac{4}{27}$  and therefore there exist also the positive equilibrium positions  $(M_{e,k}, V_{e,k})$ , ( $k = 5, 6$ ). In particular, one finds

$$M_{e,6} = 0.893 \quad V_{e,6} = 0.936. \quad (125)$$

<sup>3</sup>As found in [5], this case concerns specifically a landscape centered at Cremona (Italy).

Since

$$\begin{cases} a_1 = -0.356, & a_3 = -0.789, & a_2 = 0.675, & a_4 = 0.059, \\ I_0 = a_1 + a_4 = -0.297, & A_0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0.511, \end{cases} \quad (126)$$

then (125) is stable in the absence of diffusivity. It remains stable in the presence of diffusivity, by virtue of (107), for

$$\gamma_1 \gamma_2 \bar{\alpha} \geq 0.0598 \gamma_1 - 0.356 \gamma_2. \quad (127)$$

But it is destabilized by diffusivity for

$$\begin{cases} \gamma_1 \neq \gamma_2, \\ \gamma_1 \gamma_2 \alpha_{\bar{n}}^2 - (0.059 \gamma_1 - 0.356 \gamma_2) \alpha_{\bar{n}} + 0.511 < 0, \quad \bar{n} \in N. \end{cases} \quad (128)$$

For instance, in the case  $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 = 0$ , this happens for

$$\alpha_{\bar{n}} \gamma_1 < \frac{0.511}{0.059} \quad (129)$$

and hence for

$$\alpha_{\bar{n}} \gamma_1 > 86. \quad (130)$$

## 8 Nonlinear stability

Corresponding to each one of Theorems 4, 5, 6 of linear stability one can obtain - by using the Liapunov functional used there - a theorem of local nonlinear stability.

We will confine attention here to the nonlinear stability of  $(M_{e,6}, V_{e,6})$  and - since in this case (90) hold - to the extension of Theorem 6. Our aim is to obtain conditions of nonlinear stability, looking for *the largest conditions on the initial data*.

We assume (without loss of generality)

$$V_0(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (131)$$

By virtue of Theorems 1-2, it turns out that

$$V(\mathbf{x}, t) \leq 1, \quad M(\mathbf{x}, t) \leq M_* \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+ \quad (132)$$

with  $M_*$  given by (36). In view of (64) and (126) it follows that

$$\begin{cases} -0.893 \leq \alpha m < M_* - 0.893 \\ -0.936 \leq \beta v \leq 1 - 0.936 = 0.064 \end{cases} \quad (133)$$

and hence, by virtue of (126)

$$\begin{cases} |\alpha m| \leq \tilde{M} = \max(0.9, M_* - 0.893), & |\beta v| \leq 0.94 \\ b_{11} = -(0.356 + \bar{\alpha}_1 \gamma_1), & b_{12} = 0.675 \\ b_{22} = -(\bar{\alpha}_2 \gamma_2 - 0.059), & b_{21} = -0.789 \end{cases} \quad (134)$$

It easily follows that for

$$\bar{\alpha}_2 \gamma_2 > 0.059 \quad (135)$$

assumptions (72) and (91) are verified. Then, with  $\mu$  given by (91), from (65) it follows that

$$\frac{dE}{dt} \leq -|b_{11}| \|m\|^2 - |b_{22}| \|v\|^2 + \langle m, f^* \rangle + \langle v, g^* \rangle, \quad (136)$$

$E$  being given by (84).

In view of (66) one obtains

$$\begin{cases} \langle m, f^* \rangle = -c \langle m^2, \alpha m \rangle \leq c \tilde{M} \|m\|^2, \\ \langle v, g^* \rangle = -M_e \langle \beta v, v^2 \rangle - \langle \alpha m \beta v, v^2 \rangle - 2V_e \langle \alpha m, v^2 \rangle \leq \\ \leq (M_e + \tilde{M} + 2V_e) \|v\|^2 \leq (3 + \tilde{M}) \|v\|^2. \end{cases} \quad (137)$$

Then (136)-(137) imply

$$\frac{dE}{dt} \leq -(|b_{11}| - c\tilde{M}) \|m\|^2 - (|b_{22}| - 3 - \tilde{M}) \|v\|^2 \quad (138)$$

and the following theorem holds

**Theorem 11** - Let (131) and

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_1 \gamma_1 > 0.454\tilde{M} - 0.356 \\ \bar{\alpha}_2 \gamma_2 > 3.059 + \tilde{M} \end{cases} \quad (139)$$

hold. Then  $(M_{e,6}, V_{e,6})$  is nonlinearly exponentially asymptotically stable with respect to the  $L^2(\Omega)$ - norm.

**Proof.** Since in view of (124),  $c = 0.454$ , (139) imply (135) and

$$d = \inf(|b_{11}| - c\tilde{M}, |b_{22}| - 3 - \tilde{M}) > 0. \quad (140)$$

Finally - in view of (138) - one obtains

$$\frac{dE}{dt} \leq -2dE \rightarrow E \leq E_0 e^{-2dt}. \quad (141)$$

**Remark 5** - We remark that (131) can be verified without loss of generality, by choosing suitably the unit of measure of  $V$ . Then the restriction on the initial data is concerned only with  $\alpha m$  and is given by

$$\tilde{M} < d_1 = \inf \left( \bar{\alpha}_2 \gamma_2 - 3.059, \frac{\bar{\alpha}_1 \gamma_1 + 0.356}{0.454} \right) \tag{142}$$

with

$$\lim_{\bar{\alpha}_i \gamma_i \rightarrow \infty} d_1 = +\infty, \quad i = 1, 2. \tag{143}$$

### 9 Final Remarks

We remark that

(i) system (65) under the conditions

$$\begin{cases} \langle 1, m \rangle = \langle 1, v \rangle = 0 \\ \nabla m \cdot \underline{n} = 0 \end{cases} \quad \text{on } \partial\Omega \tag{144}$$

admits only the zero solution. In fact (65)<sub>1</sub> implies (in view of (66))

$$\langle 1, m^2 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0 \quad \text{a.e.}$$

and then (65)<sub>2</sub> implies

$$\langle 1, v^2 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0 \quad \text{a.e..}$$

Therefore in the case of the homogeneous Neumann boundary conditions - since (144)<sub>1</sub> - (144)<sub>2</sub> are not admissible, one cannot exclude the existence of nonzero constant perturbations. Essentially, under (144)<sub>2</sub>, one cannot evaluate in the case at hand, the diffusion influence on the stability. In other words, the Robin boundary conditions appear to be the most natural for eliminating the constant perturbations and evaluating the diffusion influence.

(ii) The influence of the territory appears through  $|\Omega|$  and  $\bar{\alpha}_i$  ( $i=1,2$ ).

(iii) the principal eigenvalues  $\bar{\alpha}_i$ , ( $i=1,2$ ), depend on the territory shape and size and, of course, on the functions  $\beta_i$  ( $i=1,2$ ). We here for the sake of simplicity and concreteness consider the territory  $\Omega$  given by

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\} \tag{145}$$

with  $l_i$ , ( $i=1,2$ ), positive constants. We will confine attention here to the eigenvalues  $\bar{\alpha}_1$  in the case in which the diffusion of  $M$  is not allowed through the portion of boundary  $y = l_2$  i.e. we assume

$$\begin{cases} \beta_1(0, y) = \beta_1(x, 0) = \beta_1(x, l_2) = 1, & (x, y) \in \partial\Omega \\ \beta_1(l_1, y) = 0, & y \in (0, l_2) \end{cases} \quad (146)$$

It is easily seen that the eigenfunctions of (19) with  $\beta_1$  given by (146) are

$$\phi_{nm} = \sum_{n,m} \sin \left[ \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{l_1} x \right] \sin m \frac{\pi}{l_2} y \quad (147)$$

and the corresponding eigenvalues are given by

$$\lambda_{nm} = \left[ \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right] \pi^2 \quad (148)$$

and hence

$$\bar{\alpha}_1 = \lambda_{11} = \left( \frac{1}{4l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right) \pi^2 \quad (149)$$

By virtue of (149) it immediately follows that  $\bar{\alpha}_1$  is a decreasing function of the  $\Omega$  size. The dependence on  $\beta_1$  is immediately obtained assuming (instead of (146)) that

$$\begin{cases} \beta_1(x, l_2) = 0 & x \in (0, l_1) \\ \beta_1 = 0 & \text{on the remaining part of } \partial\Omega \end{cases} \quad (150)$$

Then one easily obtains that

$$\bar{\alpha}_1 = \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{4l_2^2} \right) \pi^2. \quad (151)$$

The  $\bar{\alpha}_i$  dependence on the shape can be seen by considering the case  $\Omega = \text{circle}$ .

Passing to the prediction of the model (4)-(6) for the Cremona Landscape, we refer to [4,5] for details of what  $M$ ,  $V$ ,  $\Omega_1$  are in this case. The prediction for the future is that *the Cremona Landscape modelled by the steady state ( $M_{e,6}$ ,  $V_{e,6}$ ) is destroyed by a bio-energy diffusivity much bigger than the diffusivity of (low value) bio-potential.*

In fact for

$$\begin{cases} \gamma_1 > \frac{0.511}{0.059} \\ \gamma_2 < \frac{0.059\gamma_1 - 0.511}{\gamma_2\alpha_{\bar{n}}(\gamma_1\alpha_{\bar{n}} + 0.356)}, \quad \bar{n} \in \{1, 2, \dots\} \end{cases} \quad (152)$$

(128) holds and  $(M_{e,6}, V_{e,6})$ , stable in the absence of diffusion, is destabilized by the diffusion phenomena. In particular in the case  $\{(145) - (146), \bar{n} = 1\}$ ,  $\bar{\alpha}_1$  is given by (149) and in the case  $\{(145), (150), \bar{n} = 1\}$ ,  $\bar{\alpha}_1$  is given by (151).

## 10 Appendix

**Proof of Lemma 1.** In view of

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \Delta \Psi \rangle &= \langle \Psi_e, \Delta \varphi \rangle + \langle \varphi, \Delta \varphi \rangle = \\ &= \Psi_e \langle 1, \nabla \cdot \nabla \varphi \rangle + \langle \varphi, \nabla \cdot \nabla \varphi \rangle = -\langle \Psi_e, \delta^2 \varphi \rangle_{\partial \Omega} \\ &\quad - \langle 1, \delta^2 \varphi^2 \rangle_{\partial \Omega} - \|\nabla \varphi\|^2 \leq \frac{\Psi_e^2}{2\varepsilon} \langle 1, \delta^2 \rangle_{\partial \Omega} \\ &\quad - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) [\langle 1, \delta^2 \varphi^2 \rangle_{\partial \Omega} + \|\nabla \varphi\|^2] \end{aligned} \quad (153)$$

with  $\varepsilon = \text{const.} > 0$ . For  $\varepsilon = 1$ , in view of (18), it turns out that

$$2\langle \Psi, \Delta \Psi \rangle \leq \Psi_e^2 \langle 1, \delta^2 \rangle_{\partial \Omega} - \bar{\alpha} \|\varphi\|^2. \quad (154)$$

On the other hand

$$\|\Psi\|^2 \leq 2(\|\varphi\|^2 + \|\Psi_e\|^2) = 2(\|\varphi\|^2 + \Psi_e^2 |\Omega|) \quad (155)$$

implies

$$-\|\varphi\|^2 \leq -\frac{\|\Psi\|^2}{2} + \Psi_e^2 |\Omega| \quad (156)$$

with  $|\Omega|$  measure of  $\Omega$ . Hence (42) immediately follows.

We refer here to the proof of Lemma 1 given in [13].

**Acknowledgments.** To Roberto Monaco on the occasion of his 60<sup>th</sup> birthday. This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.d.A.M. and M.I.U.R. (PRIN2005): “Nonlinear Propagation and Stability in Thermodynamics Processes of Continuous Media”. S.R. thanks the warm hospitality extended to him by the Dept. of Mathematical Physics of N.U.I (Galway), during a recent visit (May 2008).

## References

- [1] M.G.Turner, R.H.Gardener (editors), *Quantitative Methods in Landscape Ecology*, Springer-Verlag (1991).

- [2] Z.Naveh, A.Lieberman, Landscape Ecology: Theory and Applications, 2<sup>nd</sup> edition, Springer-Verlag (1994).
- [3] V.Ingegnoli, R.F.Forman, Landscape Ecology: A Widening Foundation, Springer-Verlag (2002).
- [4] R.Monaco, G.Servente, Introduzione ai modelli matematici nelle scienze territoriali, Celid, Torino (2006).
- [5] G.Lauro, R.Monaco, G.Servente, A model for the evolution of bioenergy in an environmental system, Proceedings of the Conference “Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Phenomena”, World Scientific (2007).
- [6] R.S. Cantrell, C. Cosner, Spatial ecology via reaction-diffusion equations. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, (2004) ISBN 0-471-49301-5.
- [7] M.H. Protter, H.F. Weinberger, Maximum principles in differential equations, Prentice Hall Inc. (1967).
- [8] L.Evans, Partial Differential Equations, A.M.S. (1997).
- [9] B. Straughan, The energy method, stability and nonlinear convection, 2<sup>nd</sup> edition, Springer, Applied Math. (2004).
- [10] S.Rionero, A rigorous reduction of the  $L^2$ -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction - diffusion system of P.D.Es., J.Math.Anal.Appl. 319 (2006), 377-397.
- [11] S.Rionero,  $L^2$ -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction - diffusion system of P.D.Es., Rend. Mat. Acc. Lincei 16 (2005), 227-238.
- [12] J.D. Murray, Mathematical Biology, vol I-II, Springer-Verlag, New York (2003).
- [13] S. Rionero, Fluid motions in porous media, Notes of Lectures given at the “ PH.D. School of Mathematics and Informatics” of University “Federico II (Naples, Italy) (2008).
- [14] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer, 1994 (Second Edition).
- [15] R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, 1997 (Second Edition).
- [16] S. Zheng, Nonlinear evolution equations, Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [17] A. Turing, The chemical basis of morphogenesis, Ph. Tran. Royal Soc. (B), vol. 237 (1952).



# Sobolev ACL-homeomorphisms are bisobolev on planar domains

Nota di Roberta Schiattarella  
Presentata dal socio Carlo Sbordone  
(Adunanza del 6 marzo 2009)

**Abstract** - We study planar ACL-homeomorphisms i.e. homeomorphisms  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{onto}} \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f = (u, v)$ , which are absolutely continuous on lines parallel to the axes together with its inverse  $f^{-1}$ . We give a direct proof of the fact that an ACL-homeomorphism  $f$  belongs to Sobolev space  $W_{loc}^{1,1}(\Omega, \Omega')$  if, and only if,  $f$  is bisobolev, that is  $f^{-1}$  belongs to  $W_{loc}^{1,1}(\Omega', \Omega)$ .

**Mathematics Subject Classification (2000).** Primary 49N15, 49N60; Secondary 46E35.

**Keywords.** ACL-homeomorphisms, bisobolev maps.

## 1 Introduction

From the results in [4], [1] it follows that an ACL-homeomorphism  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{onto}} \Omega' \subset \mathbb{R}^2$  i.e. an homeomorphism which is absolutely continuous on lines parallel to the coordinate axes together with its inverse, enjoys the following property:  $f \in W_{loc}^{1,1}(\Omega; \Omega')$  if, and only if,  $f^{-1} \in W_{loc}^{1,1}(\Omega'; \Omega)$ .

In this note we give a direct proof of this theorem.

Section 2 contains the preliminary definitions and results and Section 3 the main result.

## 2 Preliminaries

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  be a bounded domain. Given a  $2 \times 2$  matrix  $D$  we define the norm  $|D|$  as the supremum of  $|D\xi|$  over all vectors  $\xi \in \mathbb{R}^2$  of unit euclidean

norm.

Recall that the adjugate  $adj B$  of  $B$  satisfies:

$$B adj B = I det(B)$$

where  $det(B)$  denotes the determinant of  $B$  and  $I$  is the identity matrix.

A mapping  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  is said to satisfy the Lusin condition (N) on the measurable set  $E \subset \Omega$  if  $|f(A)| = 0$  for every  $A \subset E$  such that  $|A| = 0$ .

A function  $u = u(x_1, x_2)$  continuous in  $\Omega$  is said *absolutely continuous on lines* in  $\Omega$  if for every rectangle

$$]a, b[ \times ]c, d[ \subset \subset \Omega$$

$u$  is absolutely continuous as a function of the real variable  $x_1$  on a.e. segment  $I_{x_2} = ]a, b[ \times \{x_2\}$  and as a function of  $x_2$  on a.e. segment  $\{x_1\} \times ]c, d[$ .

It is well known (see [6], Lemma III.3.1 and [3]) that a continuous function  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  which is absolutely continuous on lines (ACL for short) in  $\Omega$ , possesses finite partial derivatives a.e. in  $\Omega$ .

In the following we will assume that  $f = (u, v) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$  is a homeomorphism with  $u$  and  $v$  ACL together with the components of the inverse  $f^{-1}$  and call such a mapping an *ACL-homeomorphism*.

**Lemma 2.1.** (*Gehring - Lehto*) *If  $f : \Omega \xrightarrow{onto} \Omega'$  is an ACL-homeomorphism, then for  $i, j \in \{1, 2\}$  the partial derivatives  $\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_j}(x)$  exist and are finite for a.e.  $x \in \Omega$ . Moreover  $f$  is a.e. differentiable in  $\Omega$  in the classical sense.*

For the proof see [6] Theorem III.3.1.

Gehring - Lchto Theorem guarantees that ACL-homeomorphisms are a.e. differentiable in the plane and we will use the fact that the Lusin condition (N) and the area formula hold with the equality, in the set where  $f$  is differentiable and thus in particular, the image of the set of all critical point has zero measure (Sard's Lemma).

Furthermore, from Lemma 2.1 it follows that if  $f$  is an ACL-homeomorphism, then either  $J_f(x) \geq 0$  or  $J_f(x) \leq 0$  a.e. ([7], Lemma 4.11). We will assume from now on  $J_f(x) \geq 0$  a.e.. In [5] the following definition was introduced.

**Definition 1.** Let  $\Omega$  and  $\Omega'$  be bounded domains in  $\mathbb{R}^n$  and  $1 \leq p \leq \infty$ . A homeomorphism  $f : \Omega \xrightarrow{onto} \Omega'$  is said to be a  $W^{1,p}$ -bisobolev map if  $f$  belongs to the Sobolev space  $W_{loc}^{1,p}(\Omega; \Omega')$  and its inverse  $g = f^{-1}$  belongs to  $W_{loc}^{1,p}(\Omega'; \Omega)$ . If  $p = 1$  we say that  $f$  is bisobolev. If  $p = \infty$  the  $W^{1,\infty}$ -bisobolev maps are bilipschitz.

It is well known that  $W_{loc}^{1,1}$  functions are absolutely continuous on lines (see [6], Sect. III.6.1), whence bisobolev maps are particular ACL-homeomorphisms. A sufficient condition for a homeomorphism  $f : \Omega \xrightarrow{onto} \Omega'$  to be a bisobolev map is given by the following ([4])

**Proposition 2.1.** *If the homeomorphism  $f : \Omega \xrightarrow{\text{onto}} \Omega'$  belongs to  $W_{loc}^{1,1}(\Omega; \Omega')$  and its Jacobian is strictly positive a.e., then  $f^{-1} \in W_{loc}^{1,1}(\Omega'; \Omega)$ , hence  $f$  is bisobolev.*

Notice that in general, for a ACL-homeomorphism, it may happen that the zero set  $\mathcal{Z}_f$  of the Jacobian  $J_f = \det Df$

$$\mathcal{Z}_f = \{x \in \mathcal{D}_f : J_f(x) = 0\}$$

has positive measure. Hence, by Sard's Lemma, which guarantees that

$$|f(\mathcal{Z}_f)| = 0,$$

it follows that the ( $N$ )- property of Lusin may be violated (see [8]).

Therefore, in general let  $B \subset \Omega$  be a measurable set and assume that  $f$  is a homeomorphism such that  $f$  is differentiable at every point of  $B$ . Let  $\eta$  be a nonnegative Borel-measurable function on  $\mathbb{R}^2$ . Then,

$$\int_B \eta(f(x)) J_f(x) dx \leq \int_{f(B)} \eta(y) dy \quad (2.1)$$

where the equality may be unattainable on certain Borel sets  $B$  ([6], p. 137).

We will denote by

$$p_i : x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_i = 0\}$$

the orthogonal projection to  $\mathbb{H}_i$ , i.e.

$$p_1(x) = (0, x_2)$$

$$p_2(x) = (x_1, 0)$$

We denote by  $p^j$  the projection to the  $j$ -th coordinate  $p^j(x) = x_j$ .

The following *co-(N)* property, which is an adaptation of coarea formula to ACL-mappings, can be proved exactly as Theorem 4.4 in [2].

**Proposition 2.2.** *Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  be a bounded domain and  $f : \Omega \xrightarrow{\text{onto}} \Omega' \subset \mathbb{R}^2$  be an ACL-homeomorphism. Then, for any measurable set  $E \subset \Omega$  such that  $|E| = 0$  we have*

$$\int_{\mathbb{H}_i} \mathcal{H}^1(E \cap (p_i \circ f)^{-1}(z)) dz = 0$$

### 3 The main result

We will prove here our main result, following the same ideas as in [1].

**Theorem 3.1.** *Let  $f : \Omega \xrightarrow{onto} \Omega'$  be an ACL-homeomorphism. If  $f$  belongs to the Sobolev space  $W_{loc}^{1,1}(\Omega; \Omega')$  then  $f$  is bisobolev and*

$$\int_{\Omega'} |Df^{-1}(y)| dy = \int_{\Omega} |Df(x)| dx \tag{3.1}$$

*Proof.* Let  $A$  be a Borel subset of the set  $E$  where  $f^{-1}$  is differentiable with  $J_{f^{-1}} > 0$  such that  $|A| = |E|$ . Applying (2.1) and basic linear algebra we arrive at:

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(A)} |Df(x)| dx &= \int_{f^{-1}(A)} |adj Df(x)| dx \\ &= \int_{f^{-1}(A)} |(Df(x))^{-1}| J_f(x) dx \\ &= \int_{f^{-1}(A)} \frac{|Df^{-1}(f(x))|}{J_{f^{-1}}(f(x))} dx \\ &\geq \int_A \frac{|Df^{-1}(y)|}{J_{f^{-1}}(y)} J_{f^{-1}}(y) dy \\ &= \int_A |Df^{-1}(y)| dy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

In order to conclude that

$$\int_{\Omega} |Df| \geq \int_{f(\Omega)} |Df^{-1}| \tag{3.3}$$

it will be enough to prove that for  $\tilde{A} = f(\Omega) \setminus A$

$$\int_{f^{-1}(\tilde{A})} |Df(x)| dx \geq \int_{\tilde{A}} |Df^{-1}(y)| dy. \tag{3.4}$$

If  $|\tilde{A}| = 0$ , inequality (3.4) follows immediately.

Suppose that  $|\tilde{A}| > 0$  and  $\int_{\tilde{A}} |Df^{-1}(y)| dy > 0$ . We may assume  $f^{-1}(y) = (s(y), t(y))$  differentiable at all  $y \in \tilde{A}$  and  $\frac{\partial s}{\partial y_1}(y) > 0 \forall y \in \tilde{A}$ . Since  $J_{f^{-1}}(y) = 0$  on  $\tilde{A}$ , Sard's lemma implies  $|f^{-1}(\tilde{A})| = 0$ .

By  $co - (N)$  property we deduce

$$\int_{\mathbb{H}_1} \mathcal{H}^1 \left( f^{-1}(\tilde{A}) \cap (p_1 \circ f)^{-1}(z) \right) dz = 0$$

Thus the curve  $(p_1 \circ f)^{-1}(z)$  has zero one-dimensional measure for a.e.  $z \in \mathbb{H}_1$ , and its two projections to the axis have zero one-dimensional measure as well. Therefore

$$\mathcal{H}^1(p_j(f^{-1}(\tilde{A}) \cap (p_1 \circ f)^{-1}(z))) = 0 = \mathcal{H}^1(p_j(\{x \in f^{-1}(\tilde{A}) : p_1 \circ f(x) = z\}))$$

for a.e.  $z \in \mathbb{H}_1$  and for  $j = 1, 2$ .  
Using Fubini Theorem, we have

$$|\tilde{A}| = \int_{\mathbb{H}_1} |\tilde{A} \cap p_1^{-1}(z)| dz > 0 \quad (3.5)$$

Hence there exists  $z_0 \in \mathbb{H}_1$  such that

$$\mathcal{H}^1(\tilde{A} \cap p_1^{-1}(z_0)) > 0$$

but

$$\mathcal{H}^1(p_j(\{x \in f^{-1}(\tilde{A}) : p_1 \circ f(x) = z_0\})) = 0 \quad (3.6)$$

Applying the one-dimensional area formula for the absolutely continuous function  $s(\cdot, z_0) : \tau \in p^1(\tilde{A}) \rightarrow s(z_0 + \tau e_1)$  we have

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{\tilde{A} \cap p_1^{-1}(z_0)} \left| \frac{\partial s}{\partial y_1}(y_1, z_0) \right| d\mathcal{H}^1(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} N(s, \tilde{A} \cap p_1^{-1}(z_0), \sigma) d\sigma \\ &= \int_{f^{-1}(\tilde{A}) \cap (p_1 \circ f)^{-1}(z_0)} N(s, \tilde{A} \cap p_1^{-1}(z_0), \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (3.7)$$

where  $N(s, \tilde{A} \cap p_1^{-1}(z_0), \sigma)$  is the number of preimages of  $\sigma$  under  $s$  in  $\tilde{A} \cap p_1^{-1}(z_0)$ . This is a contradiction.  $\square$

Another formulation of our main result is the following

**Corollary 3.2.** *Let  $f$  be an ACL-homeomorphism. Then for any Borel set  $F \subset \Omega$*

$$\int_F |Df(x)| dx = \int_{f(F)} |Df^{-1}(y)| dy$$

## References

- [1] G. MoscarIELLO, A. Passarelli di Napoli, C. Sbordone *ACL-homeomorphisms in the plane*. J. of Math. Anal. and Appl. (to appear)
- [2] M. Csörnyei, S. Hencl, J. Maly, *Homeomorphisms in the Sobolev space  $W^{1,n-1}$* . Preprint (2007).
- [3] M. Giaquinta, M. Modica, J. Souček, *Area and the area formula*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **62** (1992), 53–87.

- [4] S. Hencl, P. Koskela, *Regularity of the inverse of a planar homeomorphism*. Arch. Ration. Mech. Anal. **33** (2008), 65–80.
- [5] S. Hencl, G. Moscariello, A. Passarelli di Napoli, C. Sbordone, *Bisobolev mappings and elliptic equations in the plane*. J. of Math. Anal. and Appl. (to appear)
- [6] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*. Springer-Verlag-Berlin, (1971).
- [7] S. Rickman, *Quasiregular mappings*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **26** Springer-Verlag, Berlin, (1993).
- [8] S. P. Ponomarev, *Property N of homeomorphism in the class  $W^{1,p}$* , Transl. Sibirskii Math., **28**(2)(1987), 140-148.

Roberta Schiattarella  
Dipartimento di Matematica e Appl. "R. Caccioppoli"  
Via Cintia- Monte S. Angelo  
80126 Napoli  
Italy  
e-mail: [schiattarellaroberta@virgilio.it](mailto:schiattarellaroberta@virgilio.it)

**RICERCA ED INNOVAZIONE NEL SETTORE DEI MATERIALI CEMENTANTI.  
RESEARCH AND INNOVATION IN THE FIELD OF CEMENTING MATERIALS.**

**Nota di Riccardo SERSALE**

(Adunanza del di 6 marzo 2009)

**Riassunto.** Vengono individuati gli obiettivi imposti dall'innovazione e le possibili strategie della loro realizzazione, dopo un'ampia analisi delle modalità operative che hanno aperto la strada alla produzione dei calcestruzzi ad alte prestazioni. Particolare attenzione viene dedicata alla possibile riduzione delle emissioni di anidride carbonica nel corso della produzione del clinker, al miglioramento delle prestazioni dei manufatti, all'aumento della produzione di cemento, alla riduzione dei costi.

Viene sottolineato il ruolo fondamentale dei prodotti supplementari, che consentono la riduzione della frazione clinker nei cementi, la necessità di una loro più compiuta caratterizzazione e di una migliore conoscenza dei meccanismi di reazione, al fine di poterne aumentare la proporzione in seno al clinker.

Si discute successivamente l'interesse della produzione di cementi innovativi: a basso consumo di energia, o dotati di proprietà particolari, unitamente agli avanzamenti che si rendono necessari per un più vasto loro accesso al mercato.

Vengono infine segnalati i traguardi programmati in tema d'innovazione, grazie anche alle aspettative aperte dai progressi della nanoscienza e nanotecnologia.

**Parole chiave:** Cementi. Innovazione.

**Summary.** The objectives forced by the innovation and the related strategies are identified, after a deep analysis of high strength concretes manufacturing course. Great attention is paid to the possible reduction of carbon dioxide emissions from cement kilns, as well to handworks performances, cement powdering and cost lowering.

The leading role of supplementary materials, allowing the cut of clinker fractions in cement, the need of a deeper characterization and knowledge of the reaction mechanisms, in order to increase their addition, are emphasized.

The interest in innovative cements manufacturing: low-energy or cements with special properties, the advances required for a market attainment, are discussed, too.

The planned trends associated with innovation programme, thanks to the advances in nanoscience and nanotechnology, are at least pointed out.

**Keywords:** Cements. Innovations.

**Premessa**

Nell'ambito dei cementi e dei calcestruzzi si è dato, in tempi recenti, un forte impulso alla ricerca fondamentale, la quale si è giovata della disponibilità di raffinate tecniche di caratterizzazione e modellazione dei materiali.

Sostanziali passi avanti hanno consentito il miglioramento delle prestazioni meccaniche e della durabilità dei manufatti ed è apparso, in tutta la sua evidenza, che una delle vie per raggiungere tale risultato è rappresentata dalla compattazione delle miscele, poiché il buon comportamento di un calcestruzzo dipende sostanzialmente dal riempimento con prodotti d'idratazione dei vuoti che si formano fra i granelli di cemento. Questo obiettivo è determinato, a sua volta, dal quantitativo di acqua d'impasto ( rapporto acqua/cemento) che deve mantenersi il più basso possibile.

Ciò, però, contrasta con la lavorabilità di un impasto, pronto ad esser gettato e compattato. L'ostacolo è stato abbastanza superato in tempi a noi vicini, con la messa a punto di nuovi additivi

fluidificanti e superfluidificanti, che hanno sostituito quelli a base di lignosolfonati, o condensati di melammina e formaldeide, costituiti da polimeri di sintesi che recano un gruppo carbossilico (COO), denominati PCE (eteri poli-carbossilici). La loro struttura può, di volta in volta, esser corretta, per impartire al calcestruzzo ritenzione d'acqua, desiderata lavorabilità, coesione, velocità di sviluppo della resistenza meccanica (1). Preparare additivi sempre più rispondenti a scopi specifici rientra infatti nelle innovazioni del prossimo futuro.

Il ricorso ai superfluidificanti e la conseguente riduzione dell'acqua d'impasto assicura, in pari tempo, durabilità ed allunga la vita in servizio del manufatto, padroneggiata dalla penetrazione dell'umidità, dei gas e degli ioni.

La fessurazione per autoessiccazione cui vanno soggetti i calcestruzzi a basso rapporto acqua/cemento, una pericolosa via d'ingresso per agenti aggressivi, è stata recentemente combattuta con una conveniente stagionatura in acqua e si giova dell'eventuale presenza di fibre.

Armonizzando opportunamente quantitativo d'acqua d'impasto, superfluidificanti e grado di compattazione, sono stati prodotti calcestruzzi ad alte ed altissime prestazioni, tanto che la resistenza massima di un calcestruzzo impiegabile per la costruzione di un'opera impegnativa è passata oggi da circa 15-25 MPa prima del 1980, a circa 150 MPa (2).

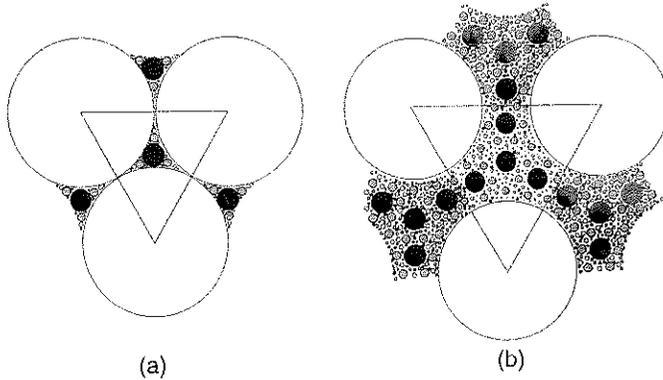
Un avanzamento nella scienza dei materiali si è già registrato agli inizi degli anni '80, con la produzione di compositi cemento-organici, denominati MDF (cementi privi di macrodifetti) (3). Nella loro formulazione, accanto al cemento Portland e, ancor meglio, a quello alluminoso, è entrato un polimero che ha esercitato dapprima una potente azione disperdente e successivamente il ruolo di legante reattivo. Si è ottenuta una pasta gommosa, che poteva esser lavorata alla calandra od anche estrusa. Il prodotto finale, che esibiva una resistenza a flessione di 200 MPa, costituisce un esempio di corpo ceramico, con fasi che compenetrano la matrice (4). Questo composito non ha però ancora trovato accettabile affermazione commerciale, per l'alto costo dei materiali e del processo e per la sua sensibilità all'umidità che, per effetto di un rigonfiamento del polimero, provoca una caduta di resistenza. Si sono naturalmente fatti tentativi per combattere queste avversità.

#### **Gli sviluppi della ricerca al fine di incrementare le prestazioni meccaniche.**

Una delle vie più valide per migliorare le prestazioni meccaniche dei calcestruzzi è rappresentata, come già sottolineato, da una compattazione spinta dell'impasto. Essa risulta facilitata dall'incorporazione nella miscela di particelle di dimensioni assai piccole, cui è affidato il compito di accomodarsi fra i granelli di cemento e riempire quei vuoti lasciati liberi dalle particelle più grandi. Questa funzione è stata assolta anche dal fumo di silice che, per effetto delle dimensioni delle particelle, dieci, cento volte più piccole di quelle del cemento, può addirittura esser considerato un nanoprodotto. Un calcestruzzo in tal modo confezionato diventa, però, più difficile da gettare. Per combinare alta consistenza ed accettabile lavorabilità diviene necessario incrementare la porzione dei fini, per separare meglio le particelle più grandi e permettere loro il movimento reciproco (1), come evidenziato nella Fig.1. Un impacchettamento ottimale è stato raggiunto nei calcestruzzi con polveri reattive RPC (reactive powder concrete) (5). Le eccezionali prestazioni meccaniche sono state ottenute rendendoli assai più omogenei dei calcestruzzi ad alte prestazioni, limitando la dimensione massima delle particelle a 300  $\mu\text{m}$  e riducendo le dimensioni dell'aggregato grosso.

Per preparare un calcestruzzo che risponda a tre inconsueti quesiti: alta resistenza a compressione, a flessione e buona duttilità, è imperativo coniugare in un unico processo manifatturiero le seguenti modalità operative: - un aumento della densità della miscela granulare, mediante impiego di un'ottimale proporzione di particelle di diametro medio distribuite nell'intera scala granulometrica; - un intervento della pressione sull'impasto nel corso dell'indurimento, per compensare parzialmente la contrazione chimica del cemento; - una variazione della microstruttura mediante appropriato trattamento termico, che trasformi C-S-H in tobermorite e successivamente in

xonolite:  $[\text{Ca}_6\text{Si}_6\text{O}_{17}(\text{OH})_2]$ ; - un miglioramento della duttilità, mediante incorporazione di scelte microfibre di acciaio, il cui diametro esplica una funzione determinante (1).



**Fig.1** - (a) Particelle più piccole accomodate negli interstizi fra particelle più grandi; (b) Particelle della medesima classe, distanziate da quelle più grandi (1).

Sono stati prodotti calcestruzzi ad altissima resistenza a compressione, fino ad 800 MPa se stagionati a temperatura e 50 MPa a trazione. Possono anche incorporare il 2% in volume di fibre, ciò che concorre ad aumentarne la resistenza a trazione. In alcuni casi possono esser impiegate fibre polimeriche, anche se la massima resistenza si raggiunge con fibre di acciaio. Uno o più tipi di fibre di differente lunghezza, rapporto d'aspetto, ecc. vengono sempre più utilizzate.

Una svolta significativa nella tecnologia del calcestruzzo è stata determinata dalla messa a punto del calcestruzzo autocompattante (6), un calcestruzzo di formulazione molto complessa, nel quale la perfetta intesa consistenza/lavorabilità viene conseguita con l'aumento della frazione fine. Si differenzia da quello classico non soltanto per la presenza di additivi superfluidificanti e modificatori di viscosità, che correggendo la reologia, prevengono la segregazione dell'impasto, ma soprattutto proprio per il maggior volume di polvere, che favorisce la separazione fra i grani di aggregato.

Come polveri trovano impiego aggiunte minerali (ceneri volanti, calcari od altro), perché l'uso di solo cemento inciderebbe sui costi di produzione.

In tema d'innovazione, tre obiettivi, che comportano un grosso impegno finanziario, rivestono carattere prioritario: -riduzione delle emissioni; -miglioramento delle prestazioni; -aumento della produzione. Il raggiungimento dei tre obiettivi viene però complicato dal basso costo del cemento, che ne fa continuamente crescere domanda ed impiego. Ogni anno si produce nel Mondo una quantità di cemento che, utilizzato sotto forma di calcestruzzo, corrisponde ad un metro cubo per persona. Un impiego tanto massiccio discende dalla facilità con cui una polvere, ottenibile da prodotti ampiamente diffusi, allorché impastata con acqua alla temperatura ordinaria, si lascia modellare, originando un manufatto con ottime caratteristiche di comportamento.

Benché l'impatto ambientale della sua produzione sia minore rispetto a quella di materiali alternativi (acciaio), il massiccio volume prodotto comporta una contribuzione del 5-8% al totale delle emissioni generate dall'insieme delle attività antropiche, un valore solo secondo a quello di produzione di energia termoelettrica.

### **Riduzione delle emissioni.**

Già da qualche tempo la riduzione delle emissioni, così come il miglioramento delle prestazioni (7), hanno riscosso particolare attenzione. Una più approfondita comprensione della chimica fisica del processo di clinkerizzazione ha consentito una migliore conoscenza della mineralogia del clinker e della sua reattività, concorrendo ad una riduzione del tenore di clinker nel cemento finito.

Negli ultimi anni in tutto il Mondo l'industria del cemento sta tentando di perfezionare strategie e tecnologie idonee a ridurre l'impatto ambientale

Un ruolo fondamentale nel controllo delle emissioni e delle polveri è attribuibile all'efficienza dei filtri. Paesi come l'Argentina, il Brasile, il Perù, hanno destinato grossi investimenti all'installazione di precipitatori elettrostatici, dotati di un'efficienza pari al 99%. L'Argentina ha speso 80 milioni di dollari negli ultimi cinque anni a questo scopo. In Perù e Brasile, il 20% ed il 15%, rispettivamente, del costo di produzione del cemento è legato al controllo dell'inquinamento. Gradualmente sta anche aumentando il rimpiazzo di combustibile con prodotti alternativi (8).

Da tempo si è proceduto alla riduzione del tenore di clinker nel cemento preparando cementi di miscela (denominati anche compositi), per taglio del clinker con prodotti supplementari reattivi (scorie d'alto forno macinate, pozzolane, ceneri volanti povere di calce (classe F), fumo di silice, argille torrefatte, calcari, ecc.). Sono prodotti che in larga misura hanno una composizione abbastanza costante e reperibili in relativa sufficienza. Altri prodotti contenenti silice ed allumina reattive sono anche impiegabili, pur se disponibili in minor quantità ed a costi più alti. Benché la loro utilizzazione sia consolidata (9), si attende ancora una più compiuta conoscenza del meccanismo di azione in seno al clinker, conseguibile attraverso una più completa loro caratterizzazione con raffinate tecniche d'indagine. Esiste infatti una limitata esperienza sull'impiego, come prodotto supplementare, di ceneri volanti ricche di calce (classe C), poiché possono recare ossido di calcio cotto a morte e pertanto soggetto ad idratazione dopo lungo tempo, provocando un'espansione differita.

In Europa il mercato è dominato dai cementi di miscela. Essi costituiscono i 2/3 del consumo di cemento, che nel 2000 è stato pari a 175 milioni di tonnellate (8). Negli Stati Uniti giocano un ruolo soltanto minore, probabilmente perché un alto tenore di aggiunta minerale determina uno sviluppo più lento di resistenza meccanica.

Una più completa caratterizzazione della pluralità dei prodotti supplementari potrebbe condurre ad una migliore conoscenza dei fattori che ne determinano la reattività e, conseguentemente, ad un innalzamento del livello di sostituzione di clinker, con riduzione delle emissioni. Per realizzare questo impegnativo traguardo si impongono: l'approfondimento delle conoscenze sulla natura delle fasi che si originano nella reazione clinker/prodotti supplementari, la previsione della struttura dei pori che nasceranno e quella dell'intensità delle forze di legame delle fasi neoformate, le ricadute sulle proprietà meccaniche del manufatto, la configurazione della facilità d'ingresso dell'umidità, dei gas ed ioni nel corpo del manufatto ed i riflessi sulla durabilità, la messa a frutto dei dati raccolti con tecniche di caratterizzazione avanzate, per coniugare i rilevamenti microscopici al comportamento macroscopico.

L'impiego di prodotti supplementari aiuta infatti uno sviluppo sostenibile per ragioni di tre ordini: - meno clinker viene prodotto, minor energia viene consumata, con riduzione delle emissioni di CO<sub>2</sub>; - la sostituzione del 50% di clinker comporta una riduzione del consumo di energia prossimo al 40%; - meno clinker si produce, più lunga la vita in servizio delle cave; - l'impiego di sottoprodotti industriali riduce l'estensione delle aree destinate allo smaltimento.

### **Cementi innovativi.**

Benché la produzione di cementi di miscela e Portland domini il mercato, sono stati messi a punto una varietà di cementi innovativi, la cui produzione nel Mondo è del tutto limitata. Possono essere suddivisi in due principali categorie: cementi a basso consumo di energia e cementi per usi speciali. Questi ultimi dovrebbero essere in grado di offrire quello che il cemento Portland non permette.

Alla prima categoria appartengono cementi ad alto contenuto di silicato bicalcico (belitici)(10), che in tutto il Mondo riscuotono particolare considerazione per il minor consumo d'energia e per la durabilità del relativo calcestruzzo. I suoi vantaggi sono: -più bassa temperatura di clinkerizzazione; - minor volume di anidride carbonica prodotta per tonnellata di clinker; -possibile impiego di un calcare di qualità meno pregiata e di un combustibile con minor potere calorifico; -formazione di una pasta di cemento più duratura, per minor presenza di idrossido di calcio e maggior contenuto di silicato di calcio idrato.

Pur tuttavia la produzione di cementi belitici non ha conquistato il mercato, perché non ancora si è riusciti a migliorarne la reattività per raggiungere maggiore velocità d'idratazione. Anche una belite resa più reattiva per effetto di drogaggio e tempratura, continua a sviluppare scarse resistenze a brevi stagionature. La ricerca si concentra sull'ottimizzazione delle modalità di raffreddamento del clinker, al fine di ridurre la spesa di macinazione, aumentarne la finezza e render meno lenta l'idratazione del beta-C<sub>2</sub>S.

Un incremento dell'attività idraulica viene ottenuto con clinker che rechino alinite (11), un clorosilicato strettamente legato all'alite (C<sub>3</sub>S) che, reagendo con acqua, forma prodotti d'idratazione simili. Il cloruro, rilasciato nel corso dell'idratazione, promuove, però, la corrosione delle armature, ciò che rende questo cemento inadatto alla realizzazione di strutture armate.

È ben più adatto allo scopo l'analogo fluorosilicato, che si forma a pari temperatura.

#### **Cementi non-Portland (Portland-free).**

Fra i cementi speciali dotati di proprietà che sovrappongono le limitazioni del Portland, attenzione particolare viene riservata al cemento alluminoso (12). Si tratta del primo fra i cementi non-Portland che, in aggiunta al rapido indurimento, esibisce eccellente resistenza a molte forme di attacco chimico, grazie ad una densa microstruttura. Il componente idraulico, responsabile della resistenza meccanica, è l'alluminato monocalcico. La maggior frazione di silice si trova come silicato bicalcico. I vari campi di applicazione ne attestano la notevole flessibilità. Può infatti esser impiegato anche per la produzione di calcestruzzi refrattari, impiegando come inerte il corindone. Trova altresì una pluralità d'impieghi nell'ingegneria chimica. Risulta inoltre idoneo all'associazione con altri prodotti, ciò che ne consente un ampliamento delle proprietà (13).

La ragione dominante che ne limita l'impiego è determinata dalla difficoltà di reperire fonti economiche ricche di allumina. In Italia, giacimenti discretamente importanti di bauxite (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>·2H<sub>2</sub>O) si rinvengono nell'Abruzzo aquilano, nel gruppo del monte Velino, nei monti Marsicani ed in quelli del Matese. Sulla loro utilizzazione gravano già la produzione di alluminio e quelle dei refrattari, degli abrasivi e dei colori. Si tratta di lenti e strati compresi fra i calcari bianchi del cretaceo. Formazioni notevoli sono quelle di Baux, presso Arles (Francia).

La difficoltà di reperimento d'allumina coinvolge del pari la produzione di cementi belite-solfoalluminato (10). Appropriate miscele di bauxite, calcare ed anidrite (gesso) danno vita, per cottura a 1300°C, ad una varietà di composizioni che comprendono formulazioni binarie, ternarie e quaternarie. I clinkers vengono miscelati con appropriate quantità di gesso per il controllo di una rapida formazione di ettringite (solfoalluminato di calcio trisolfatico), responsabile di un rapido indurimento. La sua formazione ritardata determina anche proprietà espansive. Com'è verosimile, le resistenze a brevi stagionature aumentano con il decrescere del contenuto di belite, responsabile di quelle alle lunghe stagionature. Composizioni ottimali sembrano quelle comprese fra 40-50% di solfoalluminato di calcio e 35% di belite.

Sono stati anche sviluppati cementi di terza generazione, contenenti calcio solfoalluminati ed un contenuto discretamente basso di belite. Vengono prodotti in Cina, per cottura a 1300°C di miscele di calcari di più bassa qualità e bauxite ad alto contenuto di silice e ferro, insieme con anidrite o gesso. Tale bassa temperatura associa buona macinabilità alla riduzione d'energia. Il clinker viene macinato unitamente a differenti proporzioni di gesso (e talvolta calcare), per assicurare alta resistenza a breve, o proprietà espansive. La loro produzione può creare problemi di controllo delle emissioni, in relazione alla possibile generazione di piogge acide (14).

Fra i cementi non-Portland è stato recentemente riproposto il cemento soprasolfato (15), la cui produzione subì un rallentamento in concomitanza con il peggioramento della qualità delle scorie d'alto forno (16). Risulta attraente perché si affranca da un piroprocesso e perché viene ottenuto per diretta attivazione con solfato di calcio di una scoria d'alto forno. La semplice miscela dei due costituenti si traduce anche in un risparmio di energia. È però essenziale disporre di una scoria ad alta attività idraulica, dipendente dalla sua composizione chimica e mineralogica (contenuto di vetro, struttura vetrosa), dalla superficie specifica, dalla distribuzione delle dimensioni delle particelle, dalla loro morfologia e dalla località di provenienza. È indispensabile che rechi un alto contenuto d'allumina, al fine di incrementare la formazione di ettringite che, unitamente ad una fase di tipo tobermoritico, è uno dei principali costituenti del sistema idratato ed indurito.

Grazie al basso calore d'idratazione, tale cemento viene consigliato per la realizzazione di strutture massive, per la formulazione di calcestruzzi ad alto contenuto di cemento, come quelli autocompattanti o ad alte prestazioni. Vi sono ancora altre limitazioni da superare, oltre alla qualità della scoria: -il precario comportamento alla carbonatazione; -il fatto che l'ammontare di anidride solforica è sufficiente a convertire in ettringite solo 1/4 dell'allumina presente, perché non tutta la scoria si idrata completamente e non tutta l'allumina è disponibile per un'immediata reazione con il solfato.

Grandi speranze riposano sulla produzione di leganti, mediante attivazione alcalina di prodotti reattivi. Un'intensa ricerca europea viene infatti dedicata alla produzione di cementi geopolimerici (17), originati generalmente da reazioni di idrossidi alcalini con scorie d'alto forno (18), ceneri volanti (19), o metacaolino (20). Vengono a formarsi, dopo indurimento, reticoli polimerici tridimensionali di policomposti alcalini, che hanno il vantaggio di non richiedere tecnologie di alta temperatura. Benché questi leganti siano particolarmente stimolanti ed abbiano ampia capacità di sviluppo, non ancora hanno trovato piena accoglienza da parte del mercato, presumibilmente per la loro "gioventù" e, conseguentemente, per l'assenza di una lunga valutazione del comportamento tecnico. Il loro ingresso nel mercato potrà subire un balzo con la messa a punto di tecniche di controllo di qualità e del processo di produzione e se verrà ridotto l'alto costo degli attivatori più efficaci (vetro solubile). Dovranno altresì essere migliorate le prestazioni raggiungibili con attivatori di più basso costo, ridotta la variabilità di comportamento con le modificazioni di temperatura (1), migliorata la conoscenza dei meccanismi di presa ed indurimento e del ruolo degli alcali nella reazione, ottimizzati: la rapidità del tempo di presa, che ostacola il ricorso a superfluidificanti e l'ammontare di alcali incorporato nei prodotti d'idratazione.

In tema d'innovazione non si può tralasciare di far un cenno, sia pur breve, alle ricadute che l'industria cementiera si aspetta, in riguardo al miglioramento delle prestazioni, dagli avanzamenti della nanoscienza e della nanotecnologia (21).

In tutto il Mondo, una consistente fetta dei fondi destinati alla ricerca di base viene trasferita in questo settore, per le straordinarie possibilità che essa può aprire nel prossimo futuro.

È ragionevole ipotizzare che la "performance" dei cementi e calcestruzzi, materiali sempre più complessi, discenda dai processi chimici e fisici che decorrono a nanolivelli e che pertanto questa nuova disciplina possa costituire una via unica per risalire ai meccanismi che li guidano.

Si va facendo strada l'opinione che il silicato di calcio idrato sia costituito da nanoparticelle che ne indirizzano il comportamento (22). Potrebbe pertanto essere possibile manipolare la microstruttura del C-S-H e cambiarne in meglio le proprietà, grazie alla scoperta nel 1986 del microscopio ad interazione atomica. Questo traguardo presuppone la messa a punto di accessibili tecniche di manipolazione, con accettabili costi sia dell'operazione, che della verifica dei risultati, affinché i nuovi prodotti possano conquistare il mercato.

Effetti positivi potrebbero anche interessare l'aumento della superficie specifica e la distribuzione delle dimensioni delle particelle di cemento, con evidenti ricadute sull'impacchettamento delle strutture.

Progressi si attendono pure nella composizione chimica e nelle caratteristiche dei nuovi additivi.

Potrà migliorare anche la tecnologia di produzione di calcestruzzi con nuove funzioni, mediante ingresso negli impasti di microparticelle.

Sono già stati prodotti ed impiegati calcestruzzi dotati di proprietà di autopulizia e di abbattimento di inquinanti ambientali, mediante introduzione negli impasti di microparticelle di anatasio (23, 24), grazie alle sue proprietà superidrofile e fotocatalitiche. Impiegando un calcestruzzo ad alte prestazioni, preparato con cemento bianco (25), è stata costruita in Roma, in occasione del Giubileo, la chiesa "Dives in Misericordia". Esempi sono anche la Città della Musica a Chamberie (Francia) e la costruzione di una scuola a Mortara, fiorente mercato risiero del Pavese.

Sono anche state sviluppate pitture cementizie contenenti fotocatalizzatori.

Si guarda infine con interesse anche alla produzione di calcestruzzi rinforzati con nanotubi di carbonio, dotati di resistenza e rigidità estremamente alte (26). Resta, però, ancora da superare la scarsa facilità di accoppiamento alla matrice dei nanotubi, una evoluzione che permetterà di realizzare le elevate proprietà che ci si aspetta.

### **Conclusioni.**

Gli avanzamenti compiuti negli ultimi dieci anni, costituiscono un'eccellente base di partenza per innovare il settore dei materiali cementanti.

Perfezionando l'impacchettamento delle particelle di cemento, è risultato possibile incrementare la resistenza meccanica e la durabilità dei manufatti.

I progressi nella chimica organica hanno consentito la produzione di additivi di nuova generazione che, se indubbiamente hanno complicato la formulazione degli impasti, hanno però consentito la produzione di calcestruzzi "a la carte", di volta in volta dotati delle caratteristiche richieste dai tecnici.

Se parecchio è stato fatto, molto resta ancora da fare nell'ambito di auspicabili innovazioni.

L'impiego delle più avanzate tecniche di caratterizzazione dei materiali dovrebbe permettere una più approfondita conoscenza dei meccanismi chimico-fisici che governano la presa e l'indurimento, con benefici sull'ampliamento della classe di prodotti supplementari reattivi e sull'aumento del tenore in seno al clinker. Ciò favorirebbe ancor più la riduzione: delle emissioni, del fabbisogno energetico e dei costi di produzione dei cementi di miscela, che, presumibilmente, continueranno ad occupare, in Europa, la più grossa fetta di mercato.

La produzione di clinker a basso consumo d'energia e di cementi speciali merita anch'essa un forte lavoro di ricerca, cercando di attenuare, per quanto possibile, le limitazioni imposte dagli ingenti costi e dalla ridotta diffusione di materie prime.

Progetti, tutti ancora da confermare, riposano sulle ricadute che, nel settore, potrà avere l'avanzamento della nanoscienza. Un traguardo che richiede il massimo impegno è la manipolazione della struttura dei silicati di calcio idrati, un'operazione che ne consentirebbe l'affinamento delle proprietà ed insieme un più spinto impacchettamento delle particelle di cemento, con evidenti benefici sull'incremento di resistenza meccanica e di durabilità delle strutture.

### **Bibliografia.**

1. Scrivener K.L., Kirkpatrick R.J. Innovation in use and research on cementitious materials, *Cement Concrete Res.*, 38, 128-36 (2008).
2. Sersale R. Recenti sviluppi della scienza e della tecnologia del calcestruzzo. Il calcestruzzo ad alte prestazioni, *Rend. Acc. Sc. Fis. mat.*, Napoli, 70, 53-64 (2003).
3. Birchall J.D., Howard A.J., Kendall K. Flexural strength and porosity of cement. *Nature*, 289, 388-90 (1981).
4. Young J.F. Engineering advanced cement-based materials for new applications. *Concrete Technology: New Trends, Industrial Applications*. E&F.N.Spon (1995).

5. Bonneau O., Poulin C., Dugat J., Richard P., Aitcin PC. Reactive powder concrete from theory to practice. *Concrete Intern.*, 18, 4, 47-9 (1996).
6. Sersale R. Recenti sviluppi della scienza e della tecnologia del calcestruzzo. Il calcestruzzo autocompattante. *Rend.Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 71, 115-24 (2004).
7. Sersale R. Le aggiunte minerali al cemento Portland ordinario e le modificazioni del suo comportamento tecnico. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 70, 97-09 (2003).
8. Schmidt M., Middendorf B., Vellmer C., Geisenhanslueke C. Blended Cement. In: *Innovation in Portland cement manufacturing*. Portland Cement Ass., Skokie, Ill.
9. Sersale R. Sulla riduzione delle emissioni di anidride carbonica nella produzione di cemento. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 72, 19-28 (2005).
10. Sersale R. Produzione di clinker a ridotto consumo di energia. Nota III. Cementi belitici e solfobelitici. *Rend.Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 71, 125-36 (2004).
11. Sersale R. Produzione di cementi a ridotto consumo di energia. Nota I. Il clinker ricco di alinite. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 71, 31-37 (2004).
12. Sersale R. Cementi speciali. Nota I. Natura, proprietà ed applicazioni del cemento alluminoso. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 71, 7-17 (2004).
13. Sersale R. Cementi speciali. Nota II. Sistemi cementizi ottenibili per associazione di cemento alluminoso con altri prodotti. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 71, 19-29 (2004).
14. Sersale R., Frigione G. Acid deposition and concrete attack: main influences. *Cement Concret Res.*, 28, 1, 19-24 (1998).
15. Slagstar Ecoconcrete with new supersulphated cement. *Zement-Kalk-Gips Intern.* 58, 9, 34-37 (2005).
16. Sersale R. Cementi speciali. Nota III. Cemento soprasolfatato. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 73, 37-45 (2006).
17. Sersale R. I polimeri inorganici ed il loro ruolo nella produzione di calcestruzzi ad alta resistenza e nell'abbattimento dell'"effetto di serra". *Rend: Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 75 (2008).
18. Sersale R., Frigione G. Durability of blast-furnace slag-based cementing materials. 11<sup>th</sup> ICCC, 3, 1719-25, Durban (2003).
19. Sersale R. Il cemento di ceneri volanti alcali-attivate e la sua idoneità all'impiego per calcestruzzi. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 74, 171-76 (2007).
20. Sersale R. Il metacaolino: eccellente "pozzolana" e materia prima per la produzione di nuovi materiali cementanti. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 69, 27-36 (2002).
21. Sersale R. La nanotecnologia: rivoluzione industriale del XXI secolo. *Atti Accad. Pontaniana, Napoli*, 54, 343-53 (2005).
22. Allen A.J., Thomas J.J., Jennings H.M. Composition and density of nanoscale calcium-silicate-hydrate in cement. *Nature Materials*, 25 (2007).
23. Sersale R. Materiali edili innovativi. *Atti Accad. Pontaniana, Napoli*, 56 (2008).
24. Sersale R. Ancora sui materiali edili innovativi. Calcestruzzi con proprietà fotocatalitiche. *Atti Accad. Pontaniana, Napoli*, 57 (2009).
25. Cassar L., Pepe C., Tognon G., Guerrini G.L., Amadelli R. White cement for architectural concrete, possessing photocatalytic properties. *Proc. 11th ICCC. 4, 2012. Durban* (2003).
26. Sersale R. Calcestruzzi fibro-rinforzati. *Rend.Acc. Sc. Fis. mat., Napoli*, 73, 251-61 (2006).

**L'evoluzione delle lingue e l'evoluzione biologica.  
L'evoluzione/involuzione dell'Italiano bio-chimico.  
Con un Glossario di Engl-iano.**

Nota del Socio Giuseppe D'Alessio <sup>1</sup>  
(Adunanza del dì 3 Aprile 2009)

*Keywords:* language evolution, cultural evolution , sociobiology

**Abstract** - The cultural evolution of *Homo sapiens* is based on the biological evolution of *Homo*, as proposed by sociobiology, and confirmed by data and observations. Thus, the languages that *Homo* has spoken, apparently since it was *Homo erectus*, are biological constructions that evolve with mechanisms similar to those described for the biological evolution. As an example, a brief excursus is offered on the evolution of romance languages from classical Latin. It is not possible to force evolution one way or another. However, when the evolution of a language is in progress, and involves risks of ambiguity, or of unattractive outcomes, as exemplified in the proposed Glossary, then any consumer of that language has the right to react to the words that might be considered censurable. Then we all shall sit on the bank of the evolutionary river and wait, in case even the ambiguous, or ugly terms win their Darwinian battle, or perish.

**Riassunto** - L'evoluzione culturale di *Homo sapiens* si basa sull'evoluzione biologica di *Homo*, come sostengono la sociobiologia, dati, osservazioni; così le lingue che *Homo* ha parlato e parla (pare da quando era *Homo erectus*) sono costruzioni biologiche, che evolvono con meccanismi simili a quelli della bio-evoluzione. Un esempio l'evoluzione del Latino fino alle lingue romanze attuali. Una mutazione che ha avuto successo nell'evoluzione di una lingua, non può certo essere rifiutata. E' già avvenuta. Ci sono tuttavia casi in cui alterazioni della lingua in uso, che non si sono ancora affermate, sono considerate inappropriate da un utente della lingua, in particolare nel campo della biologia e della chimica in Italia. Certamente, una volta registrati (nel Glossario che si propone) i lemmi soggettivamente criticabili, si potrà poi solo assistere, sulla riva del fiume evolutivo che scorre, per verificare se nel tempo questi lemmi, pur soggettivamente superflui, ambigui, antiestetici, nel tempo non vincano invece darwinianamente il confronto con i lemmi pre-esistenti generando così l'evoluzione della lingua.

## PREMESSA

*La lingua, ricchezza dell'uomo, e i suoi usi, elaborazione della comunità sociale, sono opere sacre. Che con il tempo evolvano, si trasformino, si dimentichino e rinascano, che talora la loro trasgressione divenga fonte di una maggiore fecondità, non esclude affatto che prima di prendersi la libertà del gioco e del cambiamento occorra aver dichiarato loro piena sudditanza. Pertanto gli eletti della società, coloro che la sorte esclude da quelle servitù destinate al povero, hanno la duplice missione di adorare e rispettare lo splendore della lingua (da: Muriel Barbery, trad. di Emanuelle Caillat e Cinzia Poli, *L'eleganza del riccio*, Edizioni e/o, Roma, 2008).*

*'When I make a word do a lot of work like that,' said Humpty Dumpty, 'I always pay it extra.'* (da: Lewis Carroll, *Through the Looking Glass*, The Millennium Fulcrum Edition, 1991, (<http://www.cs.indiana.edu/metastuff/looking/lookingdir.htm>))

Se è vero, come sostiene la sociobiologia (1), che l'evoluzione culturale di *Homo sapiens* ha le sue basi nell'evoluzione biologica di *Homo*, la lingua, le lingue che *Homo* ha parlato (pare da quando era *Homo erectus*), e che parla oggi, sono costruzioni biologiche. Un linguista, Noam Chomsky, ha chiarito che la conoscenza della struttura grammaticale di base di un linguaggio è innata, quindi geneticamente determinata.

Certo l'uso di un linguaggio sempre più progredito e funzionale è stato lo strumento principe dell'evoluzione culturale di *Homo sapiens*. Senza il linguaggio infatti non ci sarebbe stata comunicazione efficiente, e la capacità di comunicare è stata, tuttora lo è, il dispositivo chiave per il successo o l'insuccesso di modalità di comportamenti, di una cultura quindi, nell'evoluzione culturale di *Homo Sapiens*. Può essere sorprendente che una teoria evoluzionistica del linguaggio ispirata dalla biologia, dalla tassonomia vegetale, ha addirittura preceduto, anche se di poco, la teoria darwiniana dell'evoluzione biologica. L'autore, August Schleicher, uno studioso tedesco esperto di linguaggi indo-europei, in un suo articolo del 1853 propose una "*Stammbaumtheorie*", una teoria dell'evoluzione dei linguaggi descritta utilizzando alberi evolutivi, riconducibili al primo albero filogenetico dei *Notebooks* darwiniani. Lo stesso Darwin, nel suo "*The descent of man...*" ha osservato che "*The formation of different languages and of distinct species, and the proofs that both have been developed through a gradual process, are curiously parallel*" (2).

In tempi più recenti linguisti e biologi hanno proposto dirette correlazioni tra l'evoluzione dei linguaggi e l'evoluzione biologica di *Homo*, come ha argomentato John Whitfield in una sua recente rivista sintetica, ricca di citazioni (3).

Vyacheslav Ivanov, citato da Umberto Eco (4), stabilisce una precisa consonanza tra lo studio dell'evoluzione biologica a livello molecolare e lo studio dell'evoluzione delle lingue. Come infatti i biologi molecolari proiettano evidenti similarità tra le caratteristiche molecolari di specie oggi esistenti per ricostruire il trascorso dei loro tragitti evolutivi fino agli antenati comuni, darwiniani, di quelle specie, fino alla cellula primigenia, l'estremo antenato comune (LUCA, *Last Universal Common Ancestor*), così i linguisti (non tutti) cercano "corrispondenze grammaticali, sintattiche, lessicali e fonetiche tra i linguaggi noti per ricostruire i loro antenati" (4).

Luca Cavalli Sforza, in un suo storico contributo alla *National Academy of Sciences* degli Stati Uniti (5), ha evidenziato forti corrispondenze tra l'evoluzione dei linguaggi e il lungo viaggio di *Homo sapiens* dall'Africa al Medio Oriente, l'Europa, l'Asia, fino all'Australia e alle Americhe.

Uno dei meccanismi comunemente accettati di speciazione è quello della speciazione allopatrica, dovuta alla separazione fisica di appartenenti ad una stessa specie originaria, con la conseguente impossibilità delle due sub-popolazioni separate a scambiarsi geni o a condividere geni emergenti. Con il succedersi delle generazioni le due sub-popolazioni diventano sempre più diverse; quando non è più possibile l'incrocio tra membri dell'una e dell'altra si ha la nascita di due nuove specie. Ebbene si è trovato (6) che l'isolamento geografico di una sub-popolazione è importante anche per l'evoluzione di un linguaggio: i linguaggi parlati da popolazioni rimaste fisicamente isolate cambiano più lentamente che nelle popolazioni sorelle, ma con continui contatti tra loro; è il caso dell'Islanda e dell'evoluzione della sua lingua dalla lingua originaria norrena; è il caso dei dialetti "italiani" delle comunità di emigrati, ad esempio negli Stati Uniti.

Ancora, una delle teorie evuzionistiche più affermate, proposta nel 1972 da Stephen Jay Gould e Niles Eldredge (7) è quella degli equilibri punteggiati, secondo cui nel corso dell'evoluzione le specie sono stabili per lunghi periodi di tempo, per poi evolvere nell'intervallo temporale di brevi periodi, con rapide esplosioni (*bursts*) di evoluzione. Ebbene, Quentin D. Atkinson e collaboratori (8) hanno trovato che i linguaggi umani evolvono anch'essi con equilibri punteggiati, in rapide, distanti esplosioni di cambiamento.

D'altra parte come l'evoluzione biologica si è realizzata attraverso la selezione positiva o negativa di mutazioni genetiche, così l'evoluzione culturale è stata determinata dalla selezione positiva o negativa di insiemi di comportamenti, accettati spontaneamente come più vantaggiosi, o anche imposti con la forza delle armi. Le popolazioni portatrici della cultura divenuta poi dominante hanno ovviamente portato linguaggi nuovi, innescando l'evoluzione del linguaggio.

L'imposizione del Latino è stata uno degli strumenti di dominazione dei romani nel loro espansionismo in Italia, Europa e oltre. Il crollo, militare e civile, della dominazione romana, della cultura romana, e le invasioni di popoli con culture – linguaggi – diversi, hanno poi favorito la nascita, di fatto l'evoluzione dal Latino, dei *volgari*, linguaggi evolutisi in molte regioni europee dell'impero romano.

Prima si è verificata, nel tardo impero, l'evoluzione dal Latino classico di un Latino diverso, ma dotato di un suo carattere formale. Dal Latino classico di *edere, equus, ignis*, si è passato ad esempio al Latino Volgare di *manducare, caballus, focus*, lemmi pronti per un relativamente rapido adattamento nelle varie successive lingue volgari. È stato un lungo percorso: dal Latino Classico di Giulio Cesare e Cicerone al Latino Volgare ma formale del tardo impero (VII-VIII secolo), alle varianti locali del primo Medioevo, fino alle varie, diverse lingue romanze, evolute per evoluzione divergente con meccanismi allopatrici, sia per le barriere fisiche (le Alpi, i Pirenei), sia per quelle politiche, con i confini che andarono erigendosi tra macro regioni e tra piccole regioni.

Le ragioni dell'evoluzione di un volgare: si può presumere che sia avvenuta soprattutto perché favoriva una comunicazione più pronta, affrancata da troppe prescrizioni, quali regole di pronuncia, di grammatica e sintassi considerate scomode o superflue. Senza escludere la convenienza di una lingua che non rifiutasse innovazioni convenienti di pronuncia, grammatica e sintassi, oltre che nuovi lemmi, derivati da altri linguaggi.

In Italia l'evoluzione dal Latino portò ad una varietà di *volgari*. Le popolazioni della regione italica trovarono convenienti, in una certa fase storica, vantaggiose nel gergo dell'evoluzionismo (Darwin scriveva *favourable*), le proprie autoctone versioni del post-latino. Diverse tra regione e regione dello stesso territorio italico.

Nei secoli, nella comunicazione tra le regioni italiche ci fu poi la convenienza di adottare una specie di lingua franca, il volgare toscano, in ambiti tecnici (commerciale, diplomatico, scientifico) e nell'arte. Questo volgare via via affiancò i volgari locali delle varie popolazioni italiche, generando la lingua italiana. L'Italiano rimase tuttavia a lungo una lingua "colta", frequentata soprattutto in particolari ambiti sociali o tecnici, fino alla seconda metà del secolo XX, quando con l'avvento della televisione l'Italiano si è poi largamente affermato nella gran parte della popolazione italiana. Fino ad allora nei vari territori, regioni, la comunicazione si è svolta soprattutto con il *volgare* o dialetto del luogo, evolutosi in parallelo agli altri dialetti dal volgare originario post-latino. È interessante notare che quando la lingua italiana si è diffusa nella maggior parte della popolazione italiana si è avuto un nuovo sviluppo evolutivo, dovuto al fatto che nella comunicazione si è a lungo usato, alternativamente, l'italiano e la lingua locale, secondo le circostanze e i rapporti sociali: l'italiano, ad esempio, in un ufficio amministrativo; la lingua locale tra amici, tra compagni di lavoro. Ed è stata proprio la conoscenza e la frequentazione dell'italiano da parte delle

popolazioni locali, che prima usavano quasi solo il dialetto, a portare a questo nuovo sviluppo: l'italianizzazione del dialetto. Un esempio: nel Napoletano che possiamo chiamare *storico*, vaso da fiori si dice *testa*. Deriva direttamente dal Latino *testum* (vaso di coccio). Nel nobile volgare di Dante, evolutosi poi in lingua italiana, *testa* è sinonimo di *capo* (es.: di un animale), conseguenza di una ironica trasposizione del *testum* latino (*vaso di coccio*) in *cranio*. Ebbene le generazioni napoletane più giovani oggi non usano quasi più per il vaso da fiori il termine *testa*, e usano *vaso*, come in Italiano. Tenendo conto del fatto che la parola *vaso* in Napoletano continua a significare *bacio*, questo processo ha portato nel Napoletano di fine XX secolo all'ambiguità (si veda avanti) di due significati (*bacio* e *vaso da fiori*) per il solo lemma *vaso*.

Intanto l'Italiano a sua volta si evolveva. Basta guardare anche solo a tempi relativamente recenti, consultando vecchi dizionari, per cogliere la sua evoluzione. Qualche esempio: in un *Vocabolario della lingua italiana* del 1865 (9) il termine preferito per *aggettivo* è *adiettivo*; ma l'estensore registra anche *agghiettivo* e infine *aggettivo*. Ancora nel 1925, in un *Vocabolario Nomenclatore Illustrato* (10) si propongono come sinonimi di *aggettivo* i termini *addiettivo*, *adiettivo*, *aggiuntivo*. Nei dizionari contemporanei troviamo solo *aggettivo*, accompagnato in qualche caso dal lemma *addiettivo* definito però *arcaico*. I meccanismi quindi con cui la lingua evolve, come si è già accennato, non sono diversi da quelli riconosciuti come caratteristici dell'evoluzione biologica. Si basano sulle variazioni spontanee, mutazioni secondo la terminologia evoluzionistica, di parole, pronunce, espressioni grammaticali o sintattiche. Mutazioni seguite poi dalla selezione delle nuove forme. Hanno un ruolo, nella comparsa delle mutazione e nella loro selezione, positiva o negativa: l'ignoranza della lingua corretta, soprattutto in determinate sub-popolazioni, e poi il gusto dell'esotismo, le preferenze estetiche e la possibilità (purtroppo non sempre) di una comunicazione più semplice, più diretta e coerente con la cultura dell'epoca e del territorio.

In una fase storica come l'attuale, di forte presenza dell'Inglese nella comunicazione globale, di moltiplicazione dei mezzi di comunicazione di massa, di primato tecnologico dei paesi di lingua inglese, non ci sorprendiamo certo della recente accelerazione nell'evoluzione dell'Italiano, parlato ma anche scritto, con alterazioni e delezioni di forme italiane storiche, e inserimenti di forme inglesi o anglicizzate. Soprattutto nei gerghi delle discipline scientifiche, in particolare dell'informatica.

Ora è chiaro che quando una mutazione ha avuto successo nell'evoluzione di una lingua, l'evoluzione si è realizzata. La si può analizzare in termini linguistici, storici, sociali; ma non si può certo scegliere se accettarla o rifiutarla. E' già avvenuta. Soprattutto se si è passati, nell'accettare e poi nel preferire una mutazione di linguaggio, dall'uso comune all'uso "autorevole" da parte dei mezzi di comunicazione di massa, o addirittura da parte dei dizionari della lingua italiana (vedi avanti). Oggi nessuno usa per indicare un film il termine

pellicola. Film è oggi una parola italiana.

Ci sono tuttavia casi in cui si avverte che un'alterazione della lingua non si è ancora affermata, ma è limitata, ad esempio, solo ad alcuni ambiti tecnici, o ad alcuni settori della popolazione, ad esempio tra i più giovani, o in qualche campo scientifico. L'evoluzione ancora non c'è stata, è in itinere (*evolution in progress*). Sta facendo le sue prove. Può allora in questi casi essere negata la riflessione sulle mutazioni che affiorano se le si ritiene inappropriate, ovvero esteticamente censurabili? Non si può escludere infatti che si potrebbe avere un ritorno alla forma originaria, con il rifiuto della forma nuova e il realizzarsi di una "retromutazione", ove la riflessione critica avesse più successo della mutazione originaria che si era proposta.

Ecco un esempio di "retromutazione", di evoluzione interrotta, tratto dalla comunicazione in biologia. In Inglese il trasferimento di informazione dall'RNA alle proteine è definito *translation*, in Italiano traduzione, in quanto si tratta di una traduzione dal linguaggio dell'RNA, fatto di nucleotidi, a quello delle proteine, fatto di amminoacidi. Ebbene dagli anni sessanta fino agli anni novanta, si presume sostanzialmente per ignoranza, ma anche per gusto esotista, in molte presentazioni scientifiche in italiano, e in tante tesi di laurea, l'inglese *translation* era tradotto in "traslazione" invece che in "traduzione" (un accidentale gioco di parole). Anche senza avere una cultura scientifica, pur non sapendo dell'uso corretto del termine *traslazione* in fisica, geometria, ecc., basta pensare alla traslazione di una salma per rifiutare... la traduzione scorretta. Ebbene oggi, con qualche deprecabile eccezione, la *translation* dell'RNA in proteine viene correttamente tradotta in "traduzione", non più in "traslazione".

Si può sostenere che l'utente di una lingua in ogni momento può esercitare il suo diritto a una lingua che ritiene migliore semplicemente evitando nello scrivere o nel discorso le forme nuove che rifiuta. L'esperienza dice che non basta. Uno sguardo a un dizionario di Italiano di riferimento ci fa capire che l'accettazione di forme inglesi superflue (ce n'è ovviamente di essenziali) non è solo di determinati gruppi sociali o settori tecnologici, ma avviene anche a livelli professionali elevati (11). Può sorprendere, ma nell'edizione del 1990 del *Dizionario della lingua italiana* di G. Devoto e G.C. Oli (12) tra i lemmi italiani troviamo lemmi inglesi come *door-to-door* (per indicare *porta a porta*) o *tanker* (per *nave cisterna*). Infatti l'estensore della Prefazione al dizionario, Gian Carlo Oli, confessa la "massima indiscriminata apertura [...] nei confronti di forestierismi e neologismi". È una scelta. Ma ci si può chiedere se *tanker* è effettivamente un neologismo che arricchisce la lingua italiana, e non invece, semplicemente, un vocabolo di un'altra lingua, per il quale già esiste un termine utile nell'Italiano (*nave cisterna*).

E allora la riflessione critica, anche di un semplice utente della lingua, si pone. Non si può rifiutare a un membro di una certa popolazione, ad esempio scientifica, riflessioni critiche su neologismi o pseudo-neologismi superflui, ma frequentati da una parte di quella popolazione.

La domanda: esistono regole per definire quali sono le ragioni che possono indurre un linguista, o un semplice utente della lingua, a rifiutare o accettare, o anche proporre, variazioni della lingua in uso?

Una regola ferrea di un qualunque codice di comunicazione è quella della unicità del valore assegnabile a quello che i semiologi chiamano segno (ad esempio una parola, o lemma con i linguisti, una espressione, anche un gesto, una frase). Nella comunicazione con linguaggi evolutisi in un lungo percorso le ambiguità ci sono (un esempio: il lemma *fine*, con almeno tre significati), ma questa non è una buona ragione per incrementarne il numero. Finché possibile, un gatto è un gatto. Se oggi assegniamo al segno “gatto” un altro significato, generiamo inutili ambiguità. La regola può allora essere quella della conservazione della unicità del segno. La parola “*fertilizzare*”, finora usata solo con il significato di *rendere fertile un campo*, o la terra di un vaso da fiori, se la usiamo, come accade, per significare “*fecondare*” (la cellula uovo) generiamo una inutile ambiguità.

C'è poi un altro parametro, quello estetico. L'alterazione di un segno in un segno nuovo esteticamente più brutto non è facilmente accettabile. Sfido chiunque, compresi quelli che la usano, che la stridente parola *fertilizzazione* sia una bella parola, più bella in particolare di *fecondazione* (della cellula uovo), il termine che dovrebbe sostituire.

E allora mi sento il diritto di provare a suggerire la eliminazione di alterazioni del linguaggio: 1. improprie, se non addirittura erronee; 2. che generano inutili ambiguità, 3. esteticamente censurabili, proponendo riflessioni critiche sul linguaggio della biologia, della chimica in Italia. Certamente, una volta registrati (nel Glossario che segue) i lemmi nuovi che si considera criticabili, si potrà poi solo assistere, sulla riva del fiume evolutivo che scorre, per verificare se nel tempo questi lemmi, pur soggettivamente ambigui, antiestetici, nel tempo non vincano invece darwinianamente il confronto con i lemmi pre-esistenti generando così l'evoluzione della lingua.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Edward O. Wilson (1975) *Sociobiology: The New Synthesis*. Harvard University Press, Cambridge, MA, USA.
2. Charles Darwin (1871) *The descent of man, and selection in relation to sex*. (citato da John Whitfield, v. citazione n. 3)
3. John Whitfield (2009) *Across the Curious Parallel of Language and Species Evolution*, PLoS Biology, **6**, e186.
4. Umberto Eco (1993) *La ricerca della lingua perfetta*, pp. 125-127, Editori Laterza,

5. Luigi Luca Cavalli Sforza, Alberto Piazza, Paolo Menozzi, and Joanna Mountain (1988) *Reconstruction of human evolution: Bringing together genetic, archaeological, and linguistic data*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **85**, 6002-6006.
6. C. Knight, J. R. Hurford and M. Studdert-Kennedy (eds) (1998) *The Evolutionary Emergence of Language: Social function and the origins of linguistic form*, Cambridge University Press, London
7. Niles Eldredge and Stephen Jay Gould (1972) *Punctuated equilibria: an alternative to phyletic gradualism*" In T.J.M. Schopf, ed., *Models in Paleobiology*. San Francisco: Freeman Cooper. pp. 82-115.
8. Quentin D. Atkinson, Andrew Meade, Chris Venditti, Simon J. Greenhill and Mark Pagel (2008) *Languages Evolve in Punctuational Bursts*, Science, 319: 5863.
9. Pietro Fanfani (1865) *Vocabolario della lingua italiana*, Le Monnier, Firenze
10. Palmiro Premoli, (1925) *Vocabolario Nomenclatore Illustrato*, Fratelli Treves, Milano
11. Giuseppe D'Alessio (2002) *Quanti esotismi nei dizionari!* Sapere, 4, 60-61.
12. Giacomo Devoto e Gian Carlo Oli (1990) *Il dizionario della lingua italiana*, Le Monnier, Firenze.

## UN GLOSSARIO DI ENGL-IANO

### Abbreviazioni

- A** *lemma già utilizzato con diverso significato (Ambiguità)*  
**ddi** *derivato dall'Inglese: il lemma inglese originario, da cui è stato derivato il lemma di Engliano*  
**DO** *Devoto/Oli; v. sopra la citazione n. 12*  
**FA** *Forma (ormai) Accettata, dalla maggioranza di chi scrive e parla in Italiano, ovvero dalla maggior parte di una comunità sociale o scientifica*  
**NB** *nota bene*  
**v.** *vedi*

### A

Alto, usato in “alto sale” per indicare la elevata concentrazione di sale, **ddi** *high salt*

Amide, invece che **ammide**, detto/scritto per un composto con un gruppo ammidico, **ddi** *amide*

Amidico, invece che **ammidico** (v. Amide)

Amina, invece che **ammina**, detto/scritto per un composto contenente un gruppo amminico, **ddi** *amine*

Aminico, invece che **amminico**, aggettivo di ammina, v. Amina; **ddi** *aminic*

Amino acido o Aminoacido, invece che **amminoacido**, **ddi** *amino acid*

Ancestore, invece che **antenato**, **ddi** *Ancestor*

Applicare, invece che **fare domanda**, es. di impiego, di ammissione, di finanziamento, **ddi**, *to apply*

Applicazione, invece che **domanda**, **richiesta** (v. Applicare)

Ap-regolazione, utilizzato in forma orale, invece che **incremento regolato**, es.: della concentrazione di una sostanza (v. Daun-regolazione); **ddi**, *up regulation*

Assegnamento, **A**, invece che **assegnazione**, **ddi** *assignment*; NB: il **DO** dà anche “assegnamento” per “assegnazione”, ma come forma “non comune”; altri dizionari considerano i due lemmi come sinonimi.

### B

Blicciare, invece che **sbiancare**, **ddi** *bleaching*

### C

Ceramide, **FA**, invece che **ceramide**, **ddi** *ceramide*; etimologicamente

“**ammide della cera**”; ma forma ormai accettata, e al maschile: “il ceramide”

Clivare, invece che **scindere, tagliare, ecc.**, **ddi** *to cleave*

Clivaggio, invece che **fenditura, spaccatura, scissione**, **ddi** *cleavage*

Clorinazione, invece che **clorazione**, **ddi** *clorination*

Codificare per (intransitivo), invece che **codificare**; in italiano il verbo è transitivo; **ddi** *to code for*

Competuto, come participio passato di competere, verbo privo di questo tempo verbale

Core, invece che **nucleo centrale**, detto ad es. di una proteina; **ddi** *core*, derivato dal latino *cor* (*cuore*, anche in Napoletano: *core*)

Crudo, **A**, detto/scritto per una frazione di materiale biologico; ad es. per l'omogenato (v.) di un tessuto, invece che **grezzo**, **ddi** *crude*

Cultura, invece che **coltura**, riferito alla coltivazione in vitro di cellule, microrganismi, ecc. **ddi** *culture*

## D

Daunlodare, detto invece che **scaricare** (materiale in forma elettronica); **ddi** *to download*

Daunregolazione, utilizzato in forma orale invece che **diminuzione controllata** (es.: della presenza, della concentrazione, di una sostanza, ecc.); **ddi** *down regulation*

Degenerato, **A**, invece che **degenerare**, detto/scritto ad es. per il codice genetico; **ddi** *degenerate*

Deleto, invece che **rimosso, eliminato, ecc.**, **ddi** *deleted*

Detettato, invece che **trovato, identificato, ecc.**, **ddi** *detected*

Detezione, invece che **identificazione**, **ddi** *detection*

Differenziazione, **A**, invece che **differenziamento**, **ddi** *differentiation*; NB, differenziazione è un lemma italiano, ma con altro significato

Disolfuro, (come aggettivo), invece che **disolfurico**; es.: legame disolfuro invece che **legame disolfurico**; **ddi** *disulfide bond*; l'uso improprio deriva dalla presenza nella lingua inglese della forma detta *noun adjunct*, in cui un sostantivo (*noun*), in questo caso *disulfide*, è *aggiunto per* modificare un altro sostantivo (*bond*), funzionando di fatto da aggettivo. In italiano questa forma grammaticale non esiste, quindi il sostantivo che modifica non può essere un altro sostantivo (*disolfuro*), ma un aggettivo: *disolfurico*.

Divalente, invece che **bivalente**, **ddi** *divalent*

Droga, **A**, invece che **farmaco**, **ddi** *drug*; l'uso improprio, soprattutto giornalistico deriva dal doppio significato di *drug* in Inglese, dove sta sia per *farmaco*, sia per *droga* (stupefacente o altro)

## E

Editare, invece che **sistemare, ordinare** (es.: eliminando, inserendo parti in una sequenza), **ddi** *to edit*; v. splicing

Elettrofilo, (come aggettivo) invece che **elettrofilico** (es.: gruppo elettrofilo invece che **gruppo elettrofilico**; **ddi** *electrophile group*; v. disolfuro)

Elicitare, invece che **indurre, stimolare**; **ddi** *to elicit*

Elongazione, invece che **allungamento**; **ddi** *elongation*

Esporto, invece che **esportazione**, **ddi** *export* (es.: l'esporto, invece che l'**esportazione** di una proteina dal citoplasma al nucleo)

Eucariota, usato come sostantivo invece di **eucariote**; e come aggettivo invece di **eucariotico**; (es.: cellule eucariote; v. il commento alla voce disolfuro); **ddi** *eucaryote*

Exciso, detto invece che **escisso**, **ddi** *excised*

## F

Fertilizzazione, **A**, usato per l'uovo, invece che **fecondazione**; **ddi** *fertilization*

Fertilizzare, **A**, detto/scritto per l'uovo, invece che **fecondare**, **ddi** *to fertilize*

Fittare, invece che **adattare**, **ddi** *to fit*

Foldato, detto/scritto per elemento strutturale, per una proteina, invece che **strutturato**, **ddi** *folded*

Folding, **FA**, detto/scritto per una proteina; potrebbe essere sostituito in italiano da **avvolgimento**, ma rappresenta uno di quei casi in cui l'evoluzione è già avvenuta, con l'inserimento del termine inglese *fold* nel dizionario italiano

## I

Ibridizzazione, invece che **ibridazione**, **ddi** *hybridization*

Idrofilico, **FA**, invece che **idrofilo**, **ddi** *hydrophilic*; ma è forma ormai accettata dai più

Idrofobico, **FA**, invece che **idrofobo**, **ddi** *hydrophobic*; ma è forma ormai accettata dai più

Idrossile, (e derivati, es.: idrossilazione) invece che **ossidrile**; **ddi** *hydroxyl, hydroxylation*

Importo, invece che **importazione**, **ddi** *import* (es.: **importazione** di una proteina nel nucleo)

Incorretto, invece che **scorretto**; **ddi** *incorrect*

Iniziazione, **A**, invece che **inizio**; **ddi** *initiation*

Iodinare, Iodinazione, invece che **iodare, iodazione**; **ddi** *to iodinate, iodination*

## L

Legame disolfuro, v. Disolfuro

Legame idrogeno, invece che **legame a idrogeno**; **ddi** *hydrogen bond*; in realtà si tratta di un altro caso di *noun adjunct*: il sostantivo *hydrogen* modifica *bond*, come *disulfide* in *disulfide bond*; tuttavia, è ormai difficile considerarla forma errata (tuttavia rimane che nessuno direbbe “locomotiva vapore” invece che “a vapore”)

Libreria, detto/scritto per **archivio**; **ddi** *library* (che sta per *biblioteca*); per un archivio di geni c'è anche l'espressione **genoteca**

Ligando, FA, invece di *legante*, ormai improponibile; **ddi**, *ligand*, derivato a sua volta dal Latino *ligandus*

## M

Metodologia, detto/scritto per **metodo**; **ddi** *methodology*; metodologia significa un insieme di metodi, ovvero lo studio dei loro principi e scopi

Misincorporazione, detto per **incorporazione alterata** (es.: di un isotopo); **ddi**, *misincorporation*

## N

Nucleofilo, usato, come aggettivo, invece che **nucleofilico** (es.: gruppo nucleofilo invece che **gruppo nucleofilico**; **ddi** *nucleophile*; altro caso di *noun adjunct* (v. disolfuro))

Nitrogeno, riscontrato su quotidiani, invece che **azoto**

## O

Omogenato, FA, detto/scritto invece che **omogeneizzato** (di un tessuto, di una preparazione cellulare); **ddi** *homogenate*; ormai forma accettata; va annotato come la forma corretta sia invece correntemente utilizzata per i prodotti dell'infanzia

Overespresso, detto/scritto invece che **superespresso** o **iperespresso** (rispettivamente di derivazione latina o greca); si trova anche **sovraespresso**; **ddi** *overexpressed*

Overespressione, v. Overespresso

## P

Particolato, detto/scritto come sostantivo per indicare, ad es.: la **frazione particellare** di un estratto cellulare; **ddi** *particulate*

Pellettare, detto/scritto invece che **far sedimentare** (in genere, cellule); **ddi** *to pellet (down)*.

Poliamine, detto/scritto invece che **poliammine** (polimeri di ammine, ecc.); **ddi** *polyamines*

Plottare, detto/scritto invece che **mettere in grafico**; **ddi**, *to plot*

Polluzione, detto/scritto invece che **inquinamento**; **ddi**, *pollution*

Post-traslazionale, invece che **post-traduzionale**; **ddi**, *post-translational*; v. Traslazione

Primer, detto/scritto invece che **innesco**; **ddi** *primer*

Processato, detto/scritto invece che **modificato/maturato** (in genere riferito a molecole, come RNA, proteine, che subiscono modifiche, modificandosi dalle forme grezze neo-sintetizzate in forme mature, attive; **ddi**, *processed*

## R

Reduttasi, detto/scritto invece che **riduttasi** (da ridurre); **ddi**, *reductase*

Revertire, detto/scritto invece che **ritornare a, regredire**; **ddi**, *to revert*

Riparo, A, invece che **riparazione** (es.: del DNA); **ddi**, *repair*

## S

Salina, detto invece che **soluzione salina, soluzione fisiologica**; **ddi**, *saline*

Scannare, raro (per ovvie ragioni estetiche); detto/scritto, ad es. per analizzare un intervallo di lunghezze d'onda in uno spettro (UV, NMR), ovvero per riprodurre un documento in forma elettronica (v. scannerizzare); solo con ironia si potrebbe proporre l'uso di *scandire*, già usato dal sommo Dante; v. Scannerizzare

Scannerizzare, FA, detto/scritto invece che **riprodurre un documento in forma elettronica**, espressione realisticamente difficile da proporre, perché una parola è più semplice di quattro, e perché è già molto usato; una bella forma: *scandire*, appare purtroppo improponibile; **ddi**, *to scan*

Scrinare, detto, scritto invece che **vagliare, scrutinare** (es.: vagliare una serie di campioni, ecc.); **ddi**, *to screen*

Sequenza primaria, detto, scritto per la successione di amminoacidi di una catena proteica, invece che **sequenza**, o **struttura primaria** (errore ritrovato spesso anche in testi in Inglese)

Sciftare, detto, scritto invece che **spostare, muovere, trasferire**; **ddi**, *to shift*

Sottosommare, detto, scritto invece che **riassumere**; **ddi**, *to summarize*

Sottomettere, A, detto, scritto per un manoscritto, invece che **inviare** (per la pubblicazione); **ddi**, *to submit*

Splicing, FA, termine ritenuto intraducibile. In realtà esso fu originariamente mutuato dai biologi anglosassoni dalla fraseologia del mondo cinematografico, dove indica l'operazione di taglio e cucitura di parti di

pellicola per la ricostruzione di un film come prevista dalla sceneggiatura. In Italiano a questa operazione si dà il nome di **montaggio** del film. In biologia lo splicing consiste nell'operazione di taglio (di introni) e cucii (di esoni) di un trascritto primario di RNA per la ricostruzione della sequenza di RNA maturo. I biologi italiani (probabilmente non conoscendo la terminologia cinematografica) hanno preferito usare il termine inglese. **ddi** *splicing*

Superimposizione, detto per **sovrapposizione**; es. di una immagine su di un'altra; **ddi**, *superimposition*

## T

Templato, detto, scritto invece che **stampo**; es.: elica, catena di DNA stampo; **ddi**, *template*

Transfettare, detto, scritto invece che **trasfettare**, per indicare la introduzione di acidi nucleici in una cellula; **ddi**, *to transfect*

Tra(n)scriptasi, detto, scritto invece che **trascrittasi**, per indicare un enzima che trascrive DNA in RNA; **ddi**, *transcriptase*

Transferasi, detto, scritto invece che **trasferasi**, per indicare un enzima che catalizza il trasferimento di gruppi; **ddi**, *transferase*

Transferrina, detto, scritto invece che **trasferrina**; **ddi**, *transferrin*

Traslazione, termine obsoleto, invece che **traduzione**, per indicare la sintesi di proteine, in cui si traduce una sequenza di RNA (nel linguaggio di nucleotidi) in proteina (nel linguaggio di amminoacidi); **ddi**, *translation*

## V

Viabilità, con l'aggettivo derivato (raro) viabile, invece che **vitalità** (e **vitale**), per indicare la capacità di vivere, sopravvivere, di un essere vivente, di una cellula; **ddi**, *viability*

## NUOVI ADDITIVI CHIMICI E LORO RUOLO NEL CALCESTRUZZO.

### NEW ADMIXTURES AND THEIR ROLE IN CONCRETE.

Nota di Riccardo SERSALE

(Adunanza del dì 3 Aprile 2009).

**Riassunto.** Si prende atto, in primo luogo, che gli additivi chimici sono divenuti un ingrediente che entra normalmente nella preparazione dei calcestruzzi.

Nell'ambito degli additivi chimici riduttori di acqua, si descrivono i tratti principali di fluidificanti e superfluidificanti di prima generazione, basati su polimeri idrosolubili, contenenti un gruppo solfonico ( $\text{SO}_3^-$ ) o carbossilico ( $\text{COO}^-$ ) nella catena polimerica, i quali, essendo ricavati da prodotti naturali, presentano scarse possibilità di controllo della struttura molecolare. Viene successivamente trattata la nascita di polimeri superfluidificanti carbossilici (PCE), che permettono il controllo, in modo indipendente, di ogni parte della struttura molecolare. Pertanto la prestazione riguardante ciascuna proprietà del calcestruzzo: lavorabilità, ritenzione, coesione, velocità di sviluppo della resistenza, può esser opportunamente modificata. Diventa dunque un fatto concreto la preparazione "su misura" di additivi per scopi specifici.

Si sottolineano infine i vantaggi dell'utilizzazione di polimeri carbossilici, fra i quali, in primis, un impiego sempre più massiccio di cementi di miscela, che, recando una ridotta frazione di clinker, comportano, a parità di produzione, una minor emissione di biossido di carbonio.

*Parole chiave.* Additivi chimici fluidificanti. Calcestruzzo.

**Summary.** Note is in the first place taken that chemical additives have become an ingredient that contributes as a rule in concrete preparation.

In the circle of water reducing chemical admixtures, the main features of early generation additives, based on water-soluble polymers containing a sulphonate ( $\text{SO}_3^-$ ) or carboxylic ( $\text{COO}^-$ ) group on the polymeric chain and resulting from natural products, therefore with little control of the basic chemical structure, are described. The introduction of polycarboxylate ether-based superplasticiser (PCE) are afterwards discussed, whose specificity is the possible control of each part of the molecular structure, so that performance can be modified in relation to concrete properties: workability, retention, cohesion and rate of strength development. The possibility of tailoring additives for specific purposes, becomes consequently an actual case.

The benefits of PCE polymers utilization, particularly a larger employment of composite cements, which, having a lower clinker fraction, involve a lower carbon dioxide emissions too, are at least emphasized.

*Key words.* Plasticiser chemical additives. Concrete.

A partire dagli anni '70 gli additivi chimici sono divenuti un prodotto che partecipa normalmente alla produzione dei calcestruzzi e ne modifica le proprietà.

Indubbiamente gli additivi che giocano il ruolo più importante sono quelli fluidificanti e superfluidificanti (UNI-EN 934-2). Entrambi sono in grado di ridurre, a pari lavorabilità, l'acqua d'impasto, o di aumentare la lavorabilità, a pari contenuto d'acqua.

Il successo conseguito dai fluidificanti e soprattutto dai superfluidificanti, risiede nella prerogativa che consente di conciliare due esigenze antitetiche: rendere facile il getto del calcestruzzo, particolarmente nelle strutture armate ed evitare di impiegare una maggiore quantità di acqua, con conseguente aumento del rapporto acqua/cemento, a tutto vantaggio delle prestazioni (resistenza meccanica e durabilità).

Il loro meccanismo d'azione riposa sulla dispersione dei granuli di cemento che, in assenza di additivi, tendono a flocculare, formando grossi agglomerati. Tale dispersione è dovuta all'adsorbimento dei polimeri, che rendono tutta negativa la carica elettrica sulla superficie, con conseguente repulsione elettrostatica fra granuli di cemento. Si è anche supposto che l'adsorbimento dei polimeri impedisca, di per sé, il contatto fra granuli di cemento (impedimento sterico) e favorisca la dispersione. Com'è ovvio, un sistema di particelle solide in un mezzo liquido, diventa più fluido quando le particelle solide sono disperse, anziché agglomerate.

I primi fluidificanti più usati sono stati i sottoprodotti della lavorazione della cellulosa (sali dell'acido ligninsolfonico), sali di acidi idrocarbossilici, taluni polimeri idrossilati ed alcune sostanze resinose.

Il componente base di ciascuno di questi additivi è generalmente accompagnato da prodotti secondari, presenti nella materia prima e di non facile allontanamento, che possono trasformare un fluidificante normale in un ritardante della presa e dello sviluppo di resistenza iniziale.

Il dosaggio degli additivi fluidificanti è all'incirca pari a 0,2-0,3%, in massa rispetto al cemento. Non è opportuno aumentare tale dosaggio, per non favorire, di pari passo, eventuali effetti secondari ritardanti. Hanno trovato accoglienza nella formulazione dei calcestruzzi preconfezionati, per i quali il carattere ritardante dell'additivo si accorda con il mantenimento di consistenza nel corso del trasporto, un requisito essenziale per tali calcestruzzi.

Il non facile processo di purificazione degli additivi fluidificanti per liberarli dai costituenti accessori, ha successivamente portato alla produzione di additivi polifunzionali, meno sensibili al ritardo della presa, che, però, conservano il carattere fondamentale: il mantenimento della consistenza.

L'abbassamento del tenore di prodotti secondari che accompagnano l'agente principale: il ligninsolfonato, risulta determinante per l'accordo: riduzione d'acqua-ritardo di presa-sviluppo di resistenza iniziale. Se si cerca di ridurre l'effetto ritardante della presa, per ottenere più alta resistenza iniziale, si pregiudica il mantenimento di consistenza dell'impasto.

Nell'impiego corrente sono poi entrati gli additivi superfluidificanti, che si differenziano dai precedenti anche dal punto di vista del dosaggio. Si può osservare che, a parità di lavorabilità dell'impasto, l'aggiunta di un fluidificante consente una riduzione del rapporto acqua/cemento pari a circa il 5%, laddove con un superfluidificante si può raggiungere una riduzione del 20%.

I superfluidificanti sono in genere polimeri di sintesi, privi di prodotti secondari con effetto ritardante. Il dosaggio può pertanto esser relativamente elevato fino ad 1-3% in massa rispetto al cemento. Si può quindi diminuire considerevolmente il quantitativo d'acqua d'impasto, o aumentare notevolmente la lavorabilità, senza produrre un ritardo d'idratazione del cemento. Hanno permesso la produzione di calcestruzzi di più alta resistenza e di maggiore consistenza, una caratteristica che ne facilita la messa in opera.

I più usati sono stati prodotti polimerici che ebbero origine in Giappone per policondensazione della formaldeide con naftalinsolfonati. Quelli ottenuti dalla policondensazione della formaldeide con trimetilolmelammina, sono invece stati sviluppati in Germania. Poiché venivano prodotti con processi industriali, impiegando prodotti di partenza sintetici, nella loro composizione non entravano specie chimiche indesiderate, come avveniva nei fluidificanti, per la loro origine.

L'impiego di superfluidificanti ha trovato maggiore accoglienza nella produzione di calcestruzzi per prefabbricazione, essendo il mantenimento di consistenza un requisito essenziale per il trasporto di calcestruzzi preconfezionati.

All'alta capacità di riduzione d'acqua ed al soddisfacente sviluppo di resistenza iniziale, si accompagna una scarsa attitudine al mantenimento di consistenza. Per prolungare i tempi di lavorabilità dell'impasto e quando si desidera limitare lo sviluppo iniziale di calore d'idratazione per lavori complessi o prolungati, quali, ad esempio, le iniezioni di getti in profondità e per facilitare la saldatura fra gettate successive, si rende necessario il contemporaneo impiego di additivi ritardanti, con evidenti ricadute sul ritardo della presa e dell'indurimento.

### **Additivi chimici di nuova generazione.**

Consentono il perfezionamento delle prestazioni del calcestruzzo: reologia, tempo di presa, resistenza, tanto allo stato fresco, quanto dopo indurimento e devono la loro nascita allo sviluppo di polimeri carbossilici. Costituiscono prodotti di sintesi dotati di una specificità: ciascuna parte della struttura molecolare controlla differenti proprietà del calcestruzzo.

La struttura molecolare dei polimeri fluidificanti e superfluidificanti basati su tali additivi (PCE), è costituita da un pettine, con spina dorsale e ramificazioni (1). Mediante tecniche mutuata dalla nanotecnologia (2), grazie all'impiego del microscopio elettronico ad interazione atomica, attraverso manipolazione delle relative lunghezze della spina dorsale, delle ramificazioni e della loro densità, la prestazione può venir modificata in relazione alle proprietà del calcestruzzo, quali: lavorabilità, ritenzione, coesione e velocità di sviluppo di resistenza. La possibilità di confezionare "su misura" gli additivi per scopi specifici, verosimilmente diventa l'obiettivo fondamentale dell'innovazione. La ricerca deve però decisamente puntare su azioni congiunte che investano la messa a punto di nuovi materiali e di nuove tecnologie di lavorazione e formatura dei conglomerati. La nuova tendenza reclama infatti nuovi calcestruzzi di più alta resistenza iniziale e durabilità, con una consistenza ottimale che ne faciliti la gettata.

Tali nuovi additivi si prestano pertanto a soddisfare la forte domanda di miglioramento della qualità dei prodotti, soprattutto in termini di resistenza e di durabilità nel tempo, ciò che sollecita anche l'impiego di tecnologie avanzate e di mano d'opera specializzata, in ogni fase del processo produttivo dei manufatti. Il maggior vantaggio che offrono è la possibilità di modificare la loro struttura, ciò che ne rende possibile l'impiego tanto per calcestruzzi preconfezionati, quanto per quelli per prefabbricazione.

Grazie alle superiori prestazioni, sono nati calcestruzzi di elevata resistenza (superiore a 100 MPa) e di elevata fluidità, tali da esser autocompattanti (3), cioè poter esser gettati senza costipazione esterna.

Presentano efficacia variabile in funzione del dosaggio e dei costituenti del calcestruzzo, in particolare del tipo di cemento prescelto.

Le superiori prestazioni sono dovute alla possibilità, già sottolineata, di accomodare di volta in volta la struttura del polimero, poiché: riduzione d'acqua, sviluppo di resistenza meccanica iniziale, mantenimento di consistenza, elevato potere fluidificante, non sono variabili indipendenti, ma necessitano, caso per caso, di un'appropriata scelta e di una congrua concertazione, in funzione dell'esigenza.

Particolare interesse riveste la resistenza iniziale del calcestruzzo, perché consente una più rapida liberazione del manufatto dalle forme, così come un aumento della capacità produttiva con i mezzi a disposizione, evitando tempi troppo lunghi d'attesa generati dal ritardo della presa, con evidenti ricadute su costi di produzione.

Massima rilevanza riveste altresì l'incremento della produttività, nel pieno rispetto della conservazione dell'ambiente, come sancisce il Protocollo di Kyoto. Questa necessità ha determinato, particolarmente in Europa (4), (5), la valorizzazione delle aggiunte minerali e la conseguente produzione di cementi compositi, nei quali una consistente frazione di clinker, responsabile di una buona parte di emissioni di anidride carbonica, viene sostituita appunto dall'aggiunta. La commutazione di CEM I con CEM II (6), se da un lato ha una ricaduta favorevole sulla riduzione dell'effetto-serra, crea dall'altro problemi inerenti alle prestazioni, in primis, allo sviluppo della resistenza iniziale, ciò che ha reso tali cementi meno impiegati in America (4).

Il ruolo dei nuovi additivi risulta decisivo per soddisfare, da un lato, la richiesta di un aumento di produzione e, dall'altro, la riduzione dell'impatto ambientale, consentendo di attuire lo svantaggio derivante da una bassa resistenza iniziale del cemento. Ciò richiede, però, un attento studio della sua composizione, poiché i nuovi additivi, a differenza di quelli scoperti per primi, sono notevolmente sensibili alle variazioni di composizione del legante. Questa constatazione ha suggerito al Gruppo BASF Construction Chemicals S.A. (7), lo studio della relazione: proprietà chimico-fisiche del cemento/struttura molecolare dell'additivo. Tale studio, favorito

dall'avanzamento della nanoscienza e della nanotecnologia, ha consentito il rilevamento del ruolo delle diverse parti della molecola del polimero sulle proprietà del calcestruzzo e la conseguente preparazione di additivi di volta in volta dotati delle caratteristiche richieste dall'impiego specifico. I nuovi additivi permettono pertanto di: controllare le prestazioni di cementi più amici dell'ambiente aumentandone la produzione, minimizzare gli effetti dei componenti secondari che inevitabilmente recano, migliorare le caratteristiche di qualità del prodotto.

Le tecniche proprie della nanotecnologia hanno permesso di apportare modifiche alla normale struttura molecolare del polimero, accomodando, come già sottolineato, le differenti parti alle finalità d'impiego.

La catena principale, generata dalla polimerizzazione dei monomeri, reca gruppi con carica elettrica di ancoraggio al cemento. Da essa dipartono catene laterali che presiedono alle proprietà disperdenti (7). Mediante tecniche di manipolazione, risulta possibile accomodare queste parti del polimero alla funzione desiderata. La catena principale del polimero condiziona tanto il mantenimento della consistenza dell'impasto, quanto lo sviluppo di resistenza iniziale. Maggiore la lunghezza, maggiore il mantenimento di consistenza, senza richiedere aggiunta di ritardanti, perché essa si consegue per preclusione del contatto fra granuli di cemento (impedimento sterico) e non per un blocco dei centri più attivi del cemento in via d'idratazione, con conseguente ritardo della presa (7). I gruppi funzionali liberi che conferiscono carica elettrica al polimero, interagiscono con i granuli di cemento ed il loro numero, maggiore o minore, definisce l'attitudine del polimero ad entrare in reazione con il cemento.

La lunghezza delle catene laterali, così come la densità, condizionano la capacità disperdente dell'additivo. Il corretto rapporto fra lunghezza di catena e ripetizione, regola l'attitudine dell'additivo alla riduzione d'acqua.

L'immediatezza con cui l'acqua raggiunge i granuli di cemento, risulta determinata dalla modalità di terminazione della catena laterale, che controlla anche tanto il mantenimento della consistenza, quanto lo sviluppo di resistenza iniziale.

Poiché ciascuna parte della struttura polimerica controlla, in maniera indipendente, le diverse proprietà del calcestruzzo, si possono sintetizzare polimeri policarbossilici che controllano, in modo indipendente: consistenza e riduzione d'acqua, mantenimento della consistenza, ritardo della presa, sviluppo della resistenza meccanica. Ciò ha reso possibile l'impiego di cementi a presa ed indurimento più lenti, che, come già sottolineato, meglio si accordano con il Protocollo di Kyoto.

Il meccanismo d'azione dei nuovi additivi riposa sul loro adsorbimento sui granuli di cemento e sul successivo orientamento che presiede al fenomeno di dispersione. Al fine di realizzare il miglior compromesso fra le differenti proprietà del calcestruzzo, è imperativo che si stabilisca un'ottimale distribuzione fra frazione di additivo adsorbito/ frazione in soluzione. L'equilibrio fra le due frazioni viene controllato dalla struttura molecolare dell'additivo, ma anche dalle caratteristiche del cemento e può esser modificato a seconda dell'obiettivo, poiché regola sia l'azione disperdente, che il mantenimento della consistenza.

Il risultato determinato dall'additivo, può esser condizionato dalla formazione di ettringite, nel corso del processo d'idratazione del cemento. Una reazione troppo rapida additivo/cemento, può ridurre la sua azione disperdente, perché i granuli possono venir ricoperti da ettringite. Un'idratazione troppo lenta riduce l'azione disperdente dell'additivo. Pertanto, un ottimale comportamento dell'additivo nei riguardi del cemento, che deve accordarsi con la neoformazione di ettringite, può esser raggiunto attraverso il controllo dell'adsorbimento iniziale del polimero e della sua progressione. Tale controllo, unitamente a quello della compatibilità additivo/cemento, può esser effettuato su pasta, mediante valutazione della sostanza organica presente.

La Fig. 1, che riproduce l'adsorbimento nel tempo di differenti additivi carbossilici, ne consente la scelta e la destinazione d'impiego e pone in risalto che l'adsorbimento più rapido dell'additivo 1, lo rende idoneo alla produzione di prefabbricati, laddove l'adsorbimento più lento di quello 2, lo consiglia invece per la produzione di calcestruzzi preconfezionati. Il comportamento anomalo degli additivi 3 e 4, attesta invece una chiara incompatibilità con il cemento prescelto.

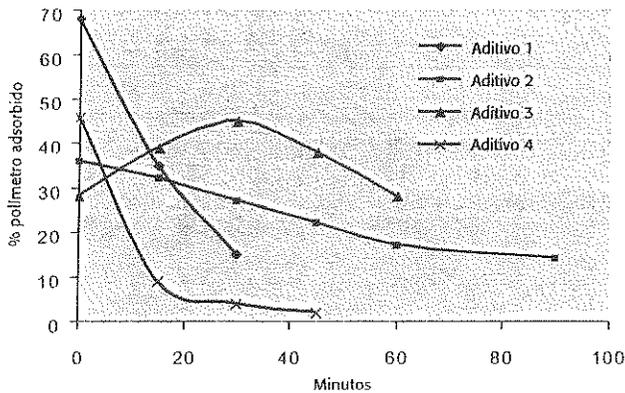


Fig. 1 - Adsorbimento nel tempo di differenti additivi policarbossilici (7).

Influenzano l'azione dell'additivo, e pertanto il comportamento finale del calcestruzzo, la superficie specifica del cemento ed i contenuti di alluminato tricalcico e di gesso. Tali caratteristiche dovranno esser tenute in conto per valutare la compatibilità additivo/cemento, per regolare la distribuzione additivo adsorbito/additivo in soluzione e per decidere per quale destinazione l'additivo si confà: se per calcestruzzo prefabbricato, o per preconfezionato.

La relazione additivo adsorbito/additivo in soluzione controlla, nel corso del tempo, l'azione disperdente ed il mantenimento della consistenza. Lo sviluppo della resistenza iniziale dipende sostanzialmente dalla dimensione del polimero: lunghezza della catena principale, ripetizione delle catene laterali e tipo di terminazione (attitudine a formare legami -OH...H).

In generale, polimeri di dimensioni maggiori rallentano la velocità d'idratazione del cemento, perché rendono più difficile il contatto dei granuli di cemento con l'acqua, prolungando il mantenimento della consistenza. Polimeri di dimensioni minori, consentono una maggiore velocità d'idratazione, il che aumenta la resistenza iniziale, come mostra la Fig.2.

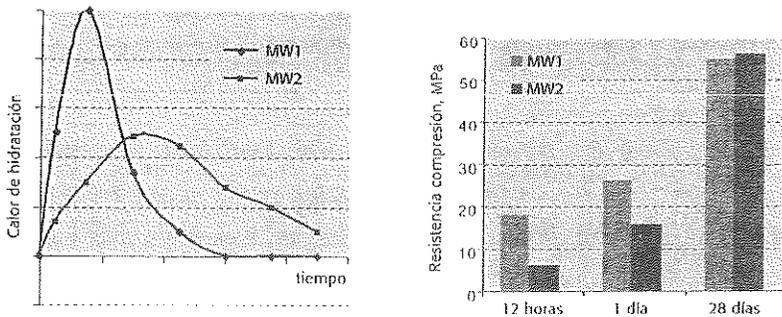


Fig. 2 - Calore di idratazione e resistenza a compressione in funzione del tempo, di additivi policarbossilici di differente peso molecolare (MW1 < MW2)(7).

Pertanto viene confermato che la struttura del polimero deve tener conto di ogni applicazione, al fine di soddisfare un ottimale equilibrio fra frazione di additivo adsorbito/frazione in soluzione, ciò che si consegue accomodando la sua struttura a ciascuna contingenza. Diviene pertanto possibile anche contribuire alla riduzione delle emissioni di anidride carbonica, impiegando, sempre più largamente, cementi compositi ad alto contenuto di aggiunta minerale (8), più poveri di clinker e di alluminato tricalcico e quindi a presa ed indurimento più lenti, ciò che, diversamente dall'Europa (5), finora non ha favorito un massivo impiego di questi cementi anche negli Stati Uniti.

Poiché sussiste una stretta connessione fra riduzione d'acqua d'impasto -con conseguente incremento di resistenza meccanica- e mantenimento di consistenza, diviene possibile ottimizzare, caso per caso, tale quantitativo d'acqua in cementi ad alto contenuto di aggiunta minerale e di finezza minore, ed equiparare, mediante l'ausilio degli additivi carbossilici, le loro prestazioni con quelle di cementi ad alto contenuto di clinker e di più spinta finezza, con ricadute anche sul risparmio di energia. I nuovi additivi rendono perciò un segnalato servizio anche alla conservazione dell'ambiente.

### **Conclusioni.**

Gli additivi chimici di nuova generazione (policarbossilici) offrono il vantaggio di poter esser preparati con caratteristiche strutturali e composizionali idonee a governare, con maggiore indipendenza, le proprietà fondamentali, intimamente connesse, dei calcestruzzi: riduzione d'acqua d'impasto e consistenza, mantenimento della stessa, ritardo di presa, resistenze iniziali, per poterle adattare al tipo di manufatto.

Mercè l'ausilio di additivi policarbossilici, è possibile impiegare cementi a maggior contenuto di aggiunta minerale e minor finezza di macinazione, senza influenzare le proprietà finali del manufatto e senza tempi di attesa nell'esecuzione dell'opera.

Il ricorso alla loro azione concorre anche ad una più efficace conservazione dell'ambiente, poiché i cementi compositi recano un più basso contenuto di clinker, responsabile di gran parte delle emissioni di biossido di carbonio.

Permettono altresì di corrispondere ad un'importante domanda d'innovazione: il miglioramento della durabilità delle strutture. È però necessario consolidare la cooperazione fra progettisti ed esperti del calcestruzzo, in accordo con l'affermazione di Adam Neville (9): "Occorre una simbiosi fra specialisti di materiali e progettisti strutturali. I primi dovrebbero conoscere meglio che cosa desiderano i progettisti. I secondi, conoscere meglio l'interesse del calcestruzzo come materiale".

Grande interesse desta anche l'impiego di prodotti di risulta dell'industria, per conseguire un risparmio delle risorse e limitarne lo smaltimento in discarica, in armonia con un'opinione, sintetica ed incisiva, recentemente manifestata: "Il futuro del calcestruzzo è nelle materie prime seconde".

### **Bibliografia**

1. Scrivener K.L., Kirkpatrick R.J. Innovation in use and research on cementitious materials. *Cement Concrete Res.*, 38, 128-136 (2008).
2. Sersale R. La nanotecnologia: rivoluzione industriale del XXI secolo. *Atti Accad. Pontaniana*, Napoli, 54, 343-353 (2005).
3. Sersale R. Recenti sviluppi della scienza e della tecnologia del calcestruzzo. Il calcestruzzo autocompattante. *Rend. Accad. Sci. Fis., mat., Napoli*, 71, 115-124, (2004).
4. Schmidt M., Middendorf B., Wellmer C., Geisenhauslueke C. Blended Cement. In: *Innovations in Portland cement manufacturing*. Portland Cement Association. Ed. Bhatti J.I. Illinois, Chapter 9.2, 1107-1148.
5. Sersale R. Ricerche ed innovazione nel campo dei materiali cementanti. *Rend. Accad. Sci. Fis., mat., Napoli*, 75 (2009).

6. Sersale R. Advances in Portland and blended cements. 9<sup>th</sup> ICCC. 1, 261-302, New Delhi (1992).
7. Borralleras Mas P., Roncero Rico J. La nanotecnologia aplicada en aditivos parahormigon: optimizaciòn del rendimiento cemento-aditivo. *Cemento Hormigon*, 77, 1892, 14-24 (2006).
8. Sersale R. Il ruolo dei prodotti cementizi supplementari sull'abbattimento dell'"effetto serra". *Atti Accad. Pontaniana, Napoli*, 53, 69-73 (2004).
9. Neville A. Una sfida al mondo del calcestruzzo. *Enco-Journal*, n.20 (2002).



**Prodotti di corrosione responsabili del degrado del calcestruzzo in ambiente marino.**

**Corrosion products resulting in deterioration of concrete in marine environment.**

Nota di Riccardo SERSALE.

(Adunanza del di 8 maggio 2009).

**Riassunto.** Si analizza l'azione dell'acqua di mare sul calcestruzzo, esaminando le reazioni favorite dal gran numero di sali disciolti. Si localizzano le zone della struttura più soggette all'attacco, si discutono le reazioni chimiche e fisiche: attacco chimico, gelo-disgelo, carbonatazione, corrosione da cloruri, lisciviazione ed erosione prodotta dal moto delle onde, precisando i principali prodotti di reazione responsabili del degrado. Si sottolinea infine che nei calcestruzzi densi e ben compattati, la velocità di penetrazione degli ioni risulta notevolmente ridotta.

*Parole chiave.* Calcestruzzo. Degrado. Acqua di mare.

**Summary.** Action of sea water on concrete and reactions promoted by the number of dissolved salts, have been analysed. The parts of the structure more subjected to the attack are localized, the various chemical and physical actions like: chemical attack, freezing-thawing, carbonation, chloride-induced corrosion, conditions produced by waves motion, leading to increased leaching and erosion actions, the main reaction products causing degradation, are successively pointed out. It is at last emphasized that in a dense and well compacted concrete, the rate of ions penetration into it, is considerably reduced.

*Key words.* Concrete. Degradation. Sea water.

Il calcestruzzo è di per se stesso un materiale durevole, quello di gran lunga più adoperato in edilizia. Per compensare la scarsa resistenza a trazione del cemento, è spesso impiegato in combinazione con l'acciaio, che ne costituisce l'armatura. La qualità del conglomerato riguarda pertanto entrambi i materiali, anche se quello lapideo gioca il ruolo più impegnativo nel comportamento del connubio.

I due materiali sono complementari in molte proprietà: stabilità della matrice cementizia, instabilità del tondino; scarsa resistenza a trazione del calcestruzzo, alta resistenza a trazione dell'acciaio, comportamento fragile del calcestruzzo, duttilità dell'acciaio. Grazie alla vicinanza dei coefficienti d'espansione, non manifestano incompatibilità e non si danneggiano l'un l'altro neppure per riscaldamento, fino ad una temperatura non superiore ai 500°C (1).

In ambiente atmosferico è un materiale abbastanza chimicamente stabile, poiché quello lapideo preserva l'acciaio dalla corrosione. L'accoppiamento ha permesso perciò la realizzazione di un materiale quasi ideale, abbastanza versatile, con il quale sono state eseguite in tutto il mondo un enorme numero di costruzioni, che hanno soddisfatto pienamente i crescenti bisogni della società.

Essendo un materiale inizialmente fluido, può esser versato in qualsivoglia stampo, per ottenere, dopo indurimento, la forma desiderata. Tale facilità d'utilizzo ha anche prodotto qualche conseguenza negativa, dovuta alla scarsa formulazione (mix-design) degli impasti, sicché si rende necessario seguire appropriate regole di preparazione e conoscere a fondo i possibili meccanismi di degrado in relazione all'ambiente di vita.

Se appropriatamente progettato per un determinato ambiente ed accuratamente elaborato, il calcestruzzo può conservarsi a lungo. È però vulnerabile in una gran varietà di condizioni al contorno (2).

Oggiogiorno la durabilità è una delle qualità maggiormente richieste. Essa esprime l'attitudine a contrastare le condizioni ambientali alle quali viene esposto il manufatto, quali: gli effetti del clima, gli attacchi chimici, l'abrasione e l'usura, il gelo-disgelo, ecc. I fattori esterni sono dovuti all'ambiente di vita delle costruzioni, quelli interni, invece, riguardano la costituzione stessa del

manufatto. L'attitudine al contrasto delle aggressioni dipende essenzialmente dalla qualità dei costituenti: cemento ed aggregati.

Benché la durabilità di un calcestruzzo faccia aggio rispetto a quella di altri materiali correntemente impiegati (legno, acciaio), essa sta diventando un fattore da tener ben presente, particolarmente per l'impiego sempre più esteso dei manufatti in ambienti aggressivi, determinati dall'inquinamento industriale, dal traffico, da attacchi chimici, da ambiente marino. Norme di progetto diventano sempre più accorte e si afferma sempre più il concetto che la formulazione di un calcestruzzo non deve più esser fatta soltanto in base all'attitudine a sopportare carichi, ma altresì in base alla durabilità. Essa non può più esser una qualità da trattare isolatamente, ma deve discendere da tutti gli aspetti della produzione, ad iniziare dagli aspetti progettuali, prestando particolare attenzione alla pratica costruttiva ed alle caratteristiche dei componenti.

Differenti fattori influenzano la durabilità: difetti di progetto o di manualità, dovuti: ad una manodopera poco qualificata, alle condizioni di lavoro della struttura, ad inadeguata compattazione, che favorisce l'ingresso di specie chimiche aggressive, a sovradosaggio di acqua per favorire la lavorabilità, a sottodosaggio di cemento con formazione di una matrice più permeabile e che, in caso di calcestruzzo armato, riveste scarsamente l'armatura.

La permeabilità del calcestruzzo influenza negativamente la protezione dell'acciaio. Presiede alla facilità con cui acqua ed ioni aggressivi penetrano nella struttura attraverso i pori ed i capillari. Una riduzione di permeabilità, realizzabile con diminuzione del rapporto acqua/cemento ed una sufficiente compattazione della miscela fresca, in uno con l'impiego di aggiunte minerali di alta finezza, come nei calcestruzzi ad alta resistenza (3), contribuisce al confinamento degli attacchi chimici allo strato esterno del manufatto e preserva l'acciaio dalla corrosione.

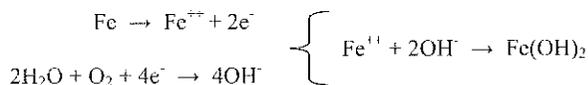
Molteplici cause esterne compromettono la durabilità del calcestruzzo. Fra esse predomina l'attacco solfatico, ma moventi di attacco sono parimente: gli attacchi acidi, la carbonatazione, il gelo-disgelo, l'attacco dell'acqua marina.

Il calcestruzzo è molto sensibile ad attacchi acidi, che logorano e rammolliscono la pasta di cemento, lasciando l'aggregato privo di legante. Tali acidi provengono principalmente dalle industrie alimentari, come vapori acidi e fumi.

Con riferimento alla carbonatazione, va osservato che l'ambiente interno del calcestruzzo è normalmente alcalino, per effetto dell'idratazione del cemento, che origina idrossido di calcio. Se il calcestruzzo è poroso e permeabile, l'anidride carbonica si infila in esso e, in presenza d'acqua, reagisce con l'idrossido di calcio ed altri idrossidi per formare carbonato, con conseguente riduzione dell'alcalinità nell'ambiente interno del manufatto. Questo processo, favorito anche dalla presenza di difetti e fessure, procede nel tempo attraverso diffusione del gas, più difficile in un calcestruzzo denso e ben compattato. In un calcestruzzo saturo d'acqua, il gas non ha possibilità di penetrare, perché i pori risultano da essa già riempiti ed in un calcestruzzo completamente secco, la carbonatazione non può aver luogo, poichè il decorso del processo richiede presenza d'umidità.

La carbonatazione non è di per sé stessa un processo distruttivo, anche se potrebbe produrre una leggera diminuzione di volume che produrrebbe fessurazione dello strato esterno, originata da compressione sullo strato non attaccato. Diventa invece un processo pericoloso se il calcestruzzo è armato, perché la penetrazione dell'anidride carbonica attraverso pori e fessure, distrugge l'ambiente passivo che protegge l'armatura dalla corrosione, rendendola vulnerabile.

La corrosione dell'armatura inizia quando sono presenti sufficienti quantità di ossigeno e di umidità, secondo un processo elettrochimico così descrivibile:



Precipita infatti idrossido ferroso che occupa un volume maggiore dell'acciaio originario. Non appena formato, esercita una pressione graduale e crescente sul calcestruzzo circostante, che provoca la fessurazione della superficie e si propaga lungo il corso dell'armatura, con conseguente

scheggiatura e completo distacco della pasta di cemento. L'armatura rimane pertanto scoperta, ciò che può anche portare al collasso della struttura.

La passivazione viene anche distrutta dai cloruri, un caso frequente per attacco da parte di acqua marina. Il calcestruzzo è infatti largamente impiegato nella costruzione di porti, moli, banchine, frangiflutti ed altre strutture esposte all'azione di acqua marina e la sua durabilità nei lavori marittimi costituisce un argomento di ricerca di massima importanza.

Il calcestruzzo in acqua di mare patisce l'attacco per effetto: dell'azione chimica dei sali disciolti, della cristallizzazione dei sali nel manufatto in condizioni di alternanze di bagnatura e di essiccazione, del gelo-disgelo, del logoramento meccanico prodotto dalle onde, della corrosione dell'armatura. L'attacco determinato da ognuna di queste cause, rende il materiale più suscettibile all'azione di residui, potenziali agenti distruttivi.

La tabella 1 riporta il tenore medio dei principali costituenti dell'acqua marina, espresso in grammi/litro.

**Tabella 1** – Concentrazioni dei principali costituenti dell'acqua marina.

<b>Elemento</b>	<b>Concentrazione (g/l)</b>
Sodio	11.00
Potassio	0.40
Magnesio	1.33
Calcio	0.43
Cloro	19.80
Solfati	2.76

L'azione chimica dell'acqua di mare sul calcestruzzo è principalmente dovuta al solfato di magnesio. Esso reagisce con l'idrossido di calcio libero nel cemento indurito per formare solfato di calcio, provocando precipitazione d'idrossido di magnesio. Ciò però non basta ad interpretare l'intero quadro dell'attacco. È stato spesso osservato che il totale deterioramento del calcestruzzo in acqua marina è spesso non caratterizzato solo dall'espansione che si registra per esposizione di calcestruzzi a soluzioni solfatiche, ma sovente prende forma di erosione e di perdita di costituenti che si distaccano dalla massa. Benché i risultati di laboratorio non siano tutti concordanti, sembra che, in soluzioni solfatiche, la presenza di cloruri ritardi il rigonfiamento del calcestruzzo.

È stato anche osservato che i calcestruzzi che hanno patito il degrado, hanno perduto parte del loro contenuto di calce. Poiché tanto l'idrossido, quanto il solfato di calcio sono entrambi più solubili in acqua di mare, che in acqua corrente, ciò, in uno con le condizioni prodotte dal moto delle onde, può incrementare l'azione lisciviante.

I solfati presenti nell'acqua marina reagiscono con l'alluminato di calcio producendo ettringite (solfoalluminato di calcio di alta solfatazione), che, in presenza d'umidità, espande ed occupa un volume maggiore all'interno del calcestruzzo. In un calcestruzzo denso e poco permeabile, l'azione dei solfati solubili resta confinata alla superficie esterna. Il solfoalluminato di calcio, benché uno dei prodotti iniziali della reazione del cemento che ha fatto presa con solfato di magnesio, risulta instabile nella soluzione risultante e probabilmente si decompone, per formare allumina idrata, gesso ed idrossido di magnesio.

I silicati di calcio idrati del cemento indurito sono del pari decomposti dal solfato di magnesio, presente in acqua marina o in acqua corrente, per formare gesso, silice idrata ed idrossido di magnesio. Gli ultimi due lentamente si combinano per formare un silicato idrato di magnesio che, a differenza del gelo di silicato di calcio idrato, ha bassissime proprietà leganti (2). Una delle teorie avanzate per interpretare l'azione favorevole della pozzolana sulla resistenza del cemento all'acqua marina, riguarda proprio la formazione di una maggiore quantità di gelo di silice, originato per reazione del solfato di magnesio sui silicati idrati generati dalla reazione della calce con la pozzolana, così come su quelli già presenti nel cemento.

Analisi di calcestruzzi progressivamente attaccati dall'acqua di mare (4), mostrano una crescita continua del contenuto d'idrossido di magnesio ed una diminuzione di quello d'idrossido di calcio, mentre il contenuto di solfato tende dapprima a crescere e poi a diminuire di nuovo.

L'azione dell'acqua di mare sul calcestruzzo può esser descritta attraverso un complesso di reazioni che hanno luogo contemporaneamente. L'azione lisciviante rimuove calce e solfato di calcio, mentre la reazione con solfato di magnesio conduce alla formazione di ettringite che causa espansione, rendendo il calcestruzzo più disponibile all'ulteriore attacco ed alla lisciviazione. La deposizione dell'idrossido di magnesio nei pori della struttura, probabilmente tende a rallentare l'attacco di un calcestruzzo denso e può non avere effetto su quelli più permeabili.

Il contributo al degrado per lisciviazione e per espansione dipende dalle situazioni. Calcestruzzi di moderate dimensioni, esposti all'azione del mare aperto, sembrano mostrare effetti di lisciviazione, piuttosto che di espansione. Pareti di moli sulle quali l'acqua può percolare senza causare una notevole lisciviazione, mostrano più facilmente effetti di espansione. La velocità dell'attacco chimico cresce con la temperatura. Velocità ed effetti sono influenzati dal tipo di cemento impiegato. L'appropriata scelta del cemento e l'impiego di un calcestruzzo di qualità, sono garanzia di un degrado molto basso, al contrario di quanto di registra per un calcestruzzo scadente.

Come già sottolineato in una precedente Nota (2), l'attacco di acqua marina decorre con diversa intensità nelle diverse zone della struttura. L'attacco più severo ha luogo in corrispondenza del pelo liquido. La zona al di sopra di tale livello è meno attaccata e quella, continuamente immersa, raramente danneggiata. Tale danneggiamento si determina soltanto se l'acqua può penetrare all'interno del manufatto. Benché nessun calcestruzzo sia strettamente impermeabile, un buon calcestruzzo risulta tanto denso da render trascurabile la velocità di penetrazione dell'acqua, allorché completamente immerso. Al di sopra del livello d'acqua, questa tende a salire nel calcestruzzo per capillarità e successivamente evaporare in superficie, permettendo che ancora acqua sia trascinata continuamente sulla superficie. In tali condizioni, l'attacco chimico può esser debole, ma la cristallizzazione dei sali nei pori, per effetto di un aumento di volume, esercita un'azione distruttiva della struttura ed alternanze di bagnatura ed essiccazione (bagnasciuga) della superficie, accentuano la disintegrazione. La medesima zona al di sopra del livello d'acqua è anche quella più esposta al logoramento prodotto dall'azione delle onde.

Il calcestruzzo patisce anche degrado per azione del gelo (5). Nei climi freddi delle regioni del Nord, l'azione del gelo è la principale causa del danno. Nella zona esposta alla marea, il calcestruzzo può andar soggetto a 200-300 cicli di gelo-disgelo in un anno, perché alternativamente colpito da essa e successivamente a contatto dell'aria a basse temperature. In condizioni di congelamento, l'acqua penetrata nei pori si trasforma in ghiaccio che esercita una pressione al contorno, occupando un volume maggiore e provocando disgregazione, allo stesso modo descritto per la cristallizzazione dei sali nei pori. Anche questa volta l'intensità del danno dipende dalla permeabilità della struttura.

Calcestruzzi preparati con cemento ad alto contenuto di scoria d'alto forno, appropriatamente compattati, hanno dato buona prova, anche in severe condizioni di freddo.

I principali prodotti di reazione che provocano scheggiatura del calcestruzzo e perdita di materiale per azione dell'attacco da parte di acqua marina, sono: la formazione di un gelo di silicato di calcio idrato ricco di magnesio, che non ha proprietà cementanti e non induce coesione nella matrice; la formazione di ettringite; e, secondo alcuni autori (6) anche quella di thaumasite  $[\text{Ca}_3\text{Si}(\text{OH})_6 \cdot 12\text{H}_2\text{O}](\text{SO}_4)(\text{CO}_3)$ , originata per combinazione di attacco solfatico e carbonatazione. Morfologia e struttura cristallina somigliano a quelle dell'ettringite, con la quale è stata spesso erroneamente confusa. La sua formazione provoca severo rammollimento o fessurazione di calcestruzzi e malte. Le condizioni della sua formazione richiedono (7): umidità relativa costantemente alta, temperatura intorno a 4°C, adeguato rifornimento di ioni  $\text{SO}_4^{--}$  e  $\text{CO}_3^{--}$ , presenza di  $\text{Al}_2\text{O}_3$  reattiva. Sembra necessaria una prima formazione di ettringite, probabilmente come agente nucleante, ciò che spiegherebbe la necessità di una fonte di allumina. La quantità di ettringite che può formarsi in un cemento è limitata da quella dell'allumina disponibile, mentre se c'è una fonte

continua di ioni solfato, la formazione di thaumasite è soltanto limitata dalla calce e dalla silice disponibili. Può pertanto formarsi in gran quantità, riducendo il calcestruzzo in una poltiglia.

Per effetto della bassa diffusione di ioni e del blocco determinato dai prodotti di reazione, la profondità di penetrazione del magnesio e degli ioni solfato si limita alla superficie della struttura.

Per effetto di una lunga esposizione ad ambiente marino, gli agenti attaccanti determinano una notevole riduzione della sezione trasversale dell'opera. L'ingresso degli ioni aggressivi viene ridotto dalla presenza di una sottile pellicola di brucite, depositatasi sulla superficie del calcestruzzo. Un ulteriore attacco può però portare alla spellatura del film e causare perdita di protezione. Inoltre il consumo d'idrossido di calcio che la formazione di brucite comporta, accelera la decalcificazione del gelo di C-S-H, arricchendolo di magnesio.

Prodotti ossicloridrici ( $\text{CaO}\cdot\text{CaCl}_2\cdot 15\text{H}_2\text{O}$  o  $\text{CaO}\cdot\text{MgCl}_2\cdot 15\text{H}_2\text{O}$ ) possono danneggiare il calcestruzzo, anche se prodotti con ioni cloro sono meno dannosi di quelli con ioni magnesio (6).

Ricerche sul campo hanno indotto alcuni autori (6) a ritenere che l'espansione da formazione di ettringite sia meno dannosa del rammollimento e della poltiglia originati dal degrado operato dal gesso, dalla formazione di silicato idrato al magnesio o dalla thaumasite.

### Conclusioni.

Il degrado dei calcestruzzi impiegati per la costruzione di porti, moli, banchine, frangiflutti ed altre strutture a contatto con acqua marina, degrado consistente in rammollimento ed espansione, è addebitabile alla formazione: di un gelo di C-S-H ricco di magnesio, pressoché privo di proprietà cementanti, ed a quello di thaumasite ed ettringite.

L'attacco più severo si registra immediatamente in corrispondenza del pelo liquido, mentre la zona più alta risente dell'effetto disgregante della cristallizzazione dei sali nei pori, prodotta dal bagnasciuga, e quella, totalmente immersa, risulta la meno attaccata di tutte.

I metodi di prevenzione dell'attacco, ampiamente discussi in una precedente Nota (2), consigliano l'impiego di cementi di miscela ed una massima compattazione. In un calcestruzzo denso e poco permeabile, i solfati solubili hanno scarsa possibilità di penetrazione e la loro azione rimane confinata alla superficie del manufatto.

### Bibliografia.

1. Sersale R. La risposta del calcestruzzo all'aumento di temperatura o causalmente al fuoco e le procedure per mitigarla. Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli, 75, 99-104 (2008).
2. Sersale R. Degrado del calcestruzzo in ambiente marino e metodi di prevenzione. Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli, 75, 87-91 (2008).
3. Sersale R. Ricerca ed innovazione nel settore dei materiali cementanti. Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli, 76 (2009).
4. Lea's Chemistry of Cement and Concrete. Action of sea water. 320. P.C. Hewlett Ed. Elsevier (2004).
5. Chemrouk KM., Attari N. Durability of concrete with particular reference to high performance concrete. In: Role of concrete in sustainable development. Ravinda K. Dhir Ed., 245-254. Thomas Telford (2003).
6. Moon HY., Kim HS., Lee ST., Chol DS. Assessment of chemical attack in long term exposed concrete in sea water. In: Role of concrete in sustainable development. Ravinda K. Dhir Ed. 361-368. Thomas Telford (2003).
7. Crammond N.J. Cement Concrete Res., 15, 1039 (1985).



## CARBONATAZIONE DEI CALCESTRUZZI.

### CONCRETES CARBONATION.

Nota del Socio ord. Riccardo Sersale

(Adunanza del di 5 giugno 2009)

**Riassunto.** Viene in primo luogo discusso il pericolo che la carbonatazione può costituire per effetto della corrosione dell'acciaio annegato nei calcestruzzi, a seguito della distruzione del film passivo di ossido generato, nelle alte condizioni di basicità, per idratazione del cemento. Vengono successivamente analizzati i differenti fattori che minimizzano la permeabilità dei calcestruzzi preparati con cemento Portland e studiata l'influenza delle aggiunte minerali: pozzolane vere od artificiali, ceneri volanti, fumo di silice, sul processo di carbonatazione, sottolineando le differenze nella sua velocità e segnalando il ruolo determinante giocato dallo spessore del copriferro, che, nei casi specifici, può esser calcolato con prove accelerate di carbonatazione.

**Parole chiave.** Calcestruzzi. Carbonatazione.

**Summary.** The danger that carbonation can give rise, owing to the corrosion of steel embedded in concretes, in consequence of the destruction of the passive oxide film in the high basicity conditions created by the hydration of cement, are in the first place discussed. Numbers of factors minimizing permeability of concretes made with Portland cement are then analysed and the influence of mineral additions as: natural or artificial pozzolanas, fly ashes and microsilica, on the carbonation process studied, emphasizing differences in carbonation rate and stressing the determinant role of the steel cover thickness, to be calculated, at a time, by means of accelerated tests.

**Key words.** Concretes. Carbonation.

La carbonatazione del calcestruzzo è una reazione chimica fra biossido di carbonio – presente nell'aria in quantità molto bassa, ma immesso in ragguardevole misura nell'atmosfera dal complesso delle attività antropiche – e prodotti d'idratazione del cemento, quali : idrossido di calcio, silicato di calcio idrato, alluminato di calcio idrato. La reazione con l'idrossido che tampona il pH è, fra tali fasi, quella che gioca il ruolo fondamentale.

Il meccanismo di carbonatazione consiste in una diffusione gassosa, combinata con una reazione chimica. Il biossido di carbonio diffonde attraverso i pori vuoti del calcestruzzo e reagisce con gli idrati della pasta di cemento, decomponendoli e formando carbonato di calcio.

Nel sistema cemento-acqua-biossido di carbonio, le fasi stabili sono: carbonato di calcio e silice, idrati d'alluminio e di ferro. Questa dannosa eventualità riguarda, però, soltanto calcestruzzi porosi, a bassa resistenza meccanica, poiché la carbonatazione di calcestruzzi densi e compatti ne migliora il comportamento strutturale, riducendo la porosità totale e la superficie specifica della pasta di cemento. Pertanto, la carbonatazione riduce la permeabilità, aumenta la resistenza meccanica del manufatto e

migliora la resistenza all'attacco da parte dei solfati o di altri ioni. Produce inoltre un altro beneficio: sottrae dall'ambiente un'aliquota di quel biossido di carbonio immesso nell'atmosfera dai forni a cemento, nel corso della produzione di clinker (1).

Ricerche espletate con metodi d'indagine avanzati su paste di cemento Portland parzialmente carbonatate, hanno rivelato che il biossido di carbonio dell'aria viene fissato nella pasta di cemento principalmente come carbonato di calcio cristallino. Una consistente frazione è anche presente in forma non cristallina e probabilmente viene incorporata nella struttura del silicato di calcio idrato (2).

Il processo di carbonatazione diviene invece pericoloso quando il cemento è armato, poiché la trasformazione di  $\text{Ca(OH)}_2$  in  $\text{CaCO}_3$  neutralizza l'alcalinità della soluzione presente nei pori della pasta di cemento, fino a raggiungere un pH al quale il ferro perde lo stato di passivazione acquisito per via eminentemente chimica, arrugginisce, aumenta di volume e produce scheggiatura del copriferro.

Per proteggere dalla corrosione l'armatura annegata, il calcestruzzo deve essere il più compatto possibile, il copriferro sufficientemente spesso, la durata della stagionatura convenientemente lunga.

Anche l'ingresso di ioni cloruro nella struttura rimuove il film passivo e promuove la corrosione dell'armatura. I processi chimici coinvolti nel movimento di ioni cloruro nei prodotti cementizi appaiono però più vicini ad uno scambio di cloruro con idrossido, piuttosto che ad una rapida diffusione e, in ambiente di cloruri, si determina una qualche dissoluzione di idrati del cemento. L'ipotesi si accorda con l'accertata, più bassa, velocità di penetrazione del cloruro nei calcestruzzi di cemento d'alto forno, grazie ad una più bassa concentrazione di ossidrilioni liberi e dalla conseguente minor capacità di scambio  $\text{OH}^- \rightarrow \text{Cl}^-$  (3).

In totale assenza di cloruri, il processo di carbonatazione si rivela necessario ma non sufficiente ad iniziare un processo di corrosione dell'armatura annegata nel calcestruzzo, poiché un tale processo risulta fortemente influenzato dall'umidità relativa ambientale e, com'è ovvio, dalla presenza di ossigeno. È stato recentemente rilevato che l'80% di umidità relativa costituisce il contenuto critico di umidità per il decorso del processo di carbonatazione (4).

La profondità di carbonatazione del calcestruzzo, che si rivela in relazione inversa alla resistenza meccanica a 28 giorni, aumenta con il tempo e dipende dai parametri seguenti:

- pressione parziale di  $\text{CO}_2$ ,
- temperatura,
- umidità dell'ambiente,
- microfessure,
- contenuto di cemento,
- durata della stagionatura.

In generale, maggiore il coefficiente di permeabilità dell'aria, maggiore la profondità di penetrazione, indipendentemente dal tipo di cemento (5). Una prolungata stagionatura, precedente all'esposizione al biossido di carbonio, riduce la profondità di carbonatazione.

Indipendentemente dal tipo di cemento, la carbonatazione risulta più profonda in un calcestruzzo esposto ad ambiente marino.

La profondità di carbonatazione si correla bene con la resistenza a compressione del manufatto, ossia con la sua compattezza.

Molte variabili agiscono sulla velocità di carbonatazione di un calcestruzzo, la quale dipende dall'azione concomitante di molte variabili. Fra le principali: il rapporto acqua/cemento, la durata della stagionatura, il contenuto di cemento, ma tale velocità non dipende significativamente dal tipo di cemento.

Risultati di profondità di carbonatazione (6), in funzione dei tempi di esposizione ad atmosfere di biossido di carbonio, di manufatti realizzati in calcestruzzo di cemento Portland, riportati in Fig. 1, dimostrano un incremento della permeabilità al biossido con l'aumento del rapporto acqua/cemento, ossia con la porosità del calcestruzzo.

La profondità di carbonatazione raggiunge valori massimi fra 50 e 70% di umidità relativa. Nelle condizioni climatiche di molti Paesi, il grado di carbonatazione decresce al crescere dell'umidità relativa. Tale constatazione viene spiegata con la considerazione che in un calcestruzzo saturo, o quasi saturo, il biossido di carbonio ha, non solo, una bassa diffusività, ma reagisce anche con gli ioni calcio contenuti nella soluzione dei pori. Si forma pertanto un film di carbonato di calcio che ostacola la diffusione del biossido (7).

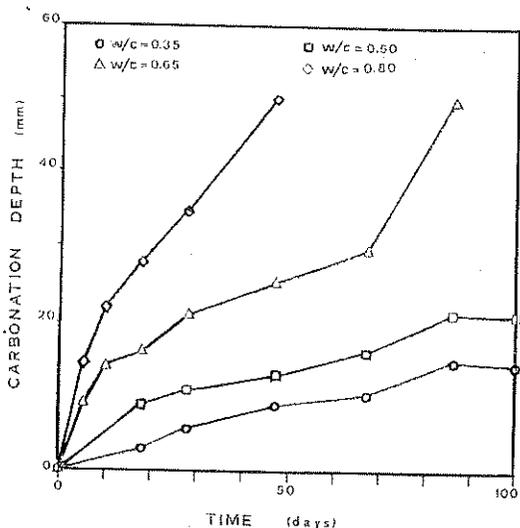


Fig. 1 - Influenza del tempo d'esposizione ad atmosfera arricchita di biossido di carbonio (R.H. = 75%) e del rapporto acqua/cemento sulla profondità di carbonatazione in calcestruzzi di cemento Portland (6).

#### Influenza delle aggiunte attive al cemento Portland sul decorso del processo di carbonatazione.

L'effetto delle aggiunte a comportamento "pozzolanico" sulla profondità di carbonatazione dei calcestruzzi, riguarda tanto l'attitudine a fissare biossido di carbonio, quanto la porosità.

Per lungo tempo i cementi pozzolanici sono stati ritenuti meno adatti del cemento Portland a resistere alla carbonatazione, per effetto del minor contenuto di portlandite ( $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ). Molte ricerche hanno però dimostrato che tale supposizione è piuttosto incerta. La profondità di carbonatazione risulta infatti statisticamente la stessa in calcestruzzi di cemento Portland ed in quelli di cementi pozzolanici, purché il raffronto venga fatto fra manufatti che a ventotto giorni abbiano denunziato la medesima resistenza meccanica (8).

Grazie alla più lenta reazione "pozzolanica", la carbonatazione di cementi pozzolanici cresce quando la durata della stagionatura è minore (< 7 giorni), ossia quando è più alta la permeabilità della pasta di cemento, rispetto all'equivalente cemento Portland.

La velocità di carbonatazione dipende anche dalla finezza del cemento, perché essa influenza il grado d'idratazione e la permeabilità della pasta di cemento.

La co-macinazione di clinker di Portland e di cenere volante si è rivelata una metodologia adatta a migliorare la resistenza alla carbonatazione di malte e calcestruzzi, poiché la semplice, diretta addizione al Portland di ceneri volanti o di altri prodotti a comportamento "pozzolanico", non ha prodotto simili, buoni risultati (9).

La carbonatazione di cementi pozzolanici è anche più profonda quando vengono adottate metodologie di carbonatazione accelerata, in sostituzione di una lunga esposizione sul posto. In ogni caso i valori di profondità rilevati, risultano meno distanti l'uno dall'altro, al crescere della resistenza meccanica dei manufatti.

La cinetica d'idratazione del cemento Portland (clinker + gesso) viene modificata dalla pozzolana anche all'inizio del processo e l'influenza della pozzolana viene resa evidente dalle modificazioni

che si producono nel calore d'idratazione, nel contenuto di Portlandite, nell'acqua combinata, nel grado d'idratazione dell'alite ( silicato tricalcico), nel grado di reazione della pozzolana. Sono questi i parametri più frequentemente presi in considerazione, anche se altri fenomeni, quali, ad esempio, la polimerizzazione della silice, concorrono ad influenzare il processo d'idratazione.

Il clinker (+ gesso) e la pozzolana seguono processi di reazione differenti e reagiscono con differente velocità. Entrambi i prodotti esercitano un' influenza reciproca.

È opinione generale che la reazione "pozzolanica", almeno con le naturali e più comuni pozzolane, si avverta dopo 3-14 giorni successivi all'impasto con acqua, ossia non appena il 70-80% dell'alite contenuta nel clinker abbia reagito (10).

La velocità della reazione "pozzolanica" dipende dalle proprietà della pozzolana e della miscela, così come dalla temperatura. Pertanto, in presenza di fumo di silice, che ha una superficie specifica BET maggiore di quella della pozzolana ordinaria, la reazione inizia prima.

Il periodo d'incubazione della reazione "pozzolanica" viene giustificato dalla forte dipendenza della solubilità della frazione vetrosa, dall'alcalinità della soluzione presente nei pori della pasta di cemento. Tale reazione non può iniziare prima che il pH abbia raggiunto il valore richiesto (11).

L'effetto del fumo di silice sulla carbonatazione dipende anche dalle proprietà del calcestruzzo. L'aggiunta del 10% di fumo al cemento Portland debolmente riduce la profondità di carbonatazione (12). Quando, però, per mantenere lavorabilità, si riduce il tenore d'acqua d'impasto mediante ricorso ai superfluidificanti, l'aggiunta del 10% di fumo di silice provoca una riduzione della profondità di carbonatazione. Per un rimpiazzo del 30% di cemento Portland con fumo di silice, l'incremento della profondità di carbonatazione si giustifica con il decremento del pH della miscela, provocato dalla rimozione degli alcali dalla soluzione dei pori della pasta di cemento.

La più bassa permeabilità ionica delle malte di cementi di miscela, viene posta in relazione con una struttura più fine dei pori capillari. Nelle paste di cemento, il coefficiente di diffusione effettivo di specie ioniche risulta minore di un fattore 1000 rispetto a quello dell'acqua. Decresce al decrescere del rapporto acqua/cemento, della temperatura, con l'aumento della durata della stagionatura e lo spessore dei provini.

Il coefficiente di diffusione si correla abbastanza bene con il volume dei pori di raggio inferiore a 2 nm, ma non con il volume totale dei pori (13). In prima approssimazione, il coefficiente di diffusione appare dipendere dalla morfologia complicata e contorta dei pori capillari e quello di diffusione di anioni dipende dalla natura dei cationi ai quali si associano.

La carbonatazione accelerata è un utile mezzo d'indagine, perché consente un approssimato rilevamento della sua profondità, nelle condizioni reali dell'ambiente.

La concentrazione di biossido di carbonio in un ambiente normale è generalmente prossima a 0,03%, mentre nella prova accelerata sale al 3%. In condizioni normali, questa metodologia abbrevia il tempo di carbonatazione da dieci anni a solo poche settimane. È ovvio che la profondità di carbonatazione, misurata con una esposizione diretta all'ambiente, offra informazioni ben più importanti per la valutazione della vita in servizio di una struttura armata, di quelle deducibili dalla prova accelerata, in vista della progettazione dello spessore del copriferro.

Impiegando una concentrazione di biossido di carbonio del 3%, quale quella della prova accelerata, la differenza nella velocità di carbonatazione è prossima ad un fattore 10. Tale velocità viene stimata esser approssimativamente dieci volte più lenta di quella della prova accelerata (14).

Fissando una durata di tempo pari a 50 anni come vita in servizio di una struttura, i risultati sperimentali (14) hanno mostrato che per un cemento CEM I (15) il tempo necessario ad una carbonatazione della profondità di 15 mm supera tale durata. Pertanto uno spessore del copriferro di 20 mm è sufficiente ad assicurare la resistenza alla carbonatazione, quando la durata di stagionatura non è inferiore a 3 giorni. Uno spessore del copriferro da 35-40 mm è invece considerato necessario per un calcestruzzo prodotto con CEM III o con CEM III che rechi un rimpiazzo di cenere volante fino al 50%.

### Conclusioni.

Al fine di minimizzare la carbonatazione dei calcestruzzi preparati, o no, con cementi di miscela, e diminuire il pericolo di corrosione dell'armatura in essi annegata, è imperativo ridurre al massimo il rapporto acqua/cemento, mediante ricorso ad additivi superfluidificanti di ultima generazione (16), al fine di realizzare la massima compattezza del manufatto per ostacolare la diffusione del biossido di carbonio.

L'impiego di calcestruzzi prodotti con solo cemento Portland non è più considerato un vantaggio. È buona norma, ad ogni modo, sottoporre provini realizzati con calcestruzzo di solo Portland, o di cementi di miscela, a prove di carbonatazione accelerata, per una ragionevole determinazione dello spessore del copriferro più idoneo ad assicurare al manufatto una ponderata vita in servizio.

### Bibliografia.

1. Sersale R. Il calcestruzzo: un sequestrante di anidride carbonica. Atti Accad. Pontaniana, Napoli. 57, (2009).
2. Thomas S., Meise-Gresch K., Muller-Warmuth W. MAS NMR studies of partially carbonated Portland cement and tricalcium silicate pastes. Jour. Amer. Ceram. Soc., 76, 8, 1998-2001 (1993).
3. Hewlett P.C. Lea's Chemistry of Cement and Concrete. 4<sup>th</sup> edition. Elsevier Press. 401 (1998).
4. Mmusi M.O., Alexander M.G., Beuschausen H.D. Determination of critical moisture content for carbonation of concrete. In: Concrete Repair, Rehabilitation and Retrofitting II. Alexander et al. Eds. Taylor Francis Group, 163-164. London (2009).
5. Houst Y.F. Influence of microstructure and water on the diffusion of CO<sub>2</sub> and O<sub>2</sub> through cement paste. In: Malhotra V.M. ed. Proc. 2<sup>nd</sup> Intern. Congress on Durability of Concrete. Montreal 1991. Amer. Concrete Inst. Special Publ. 126. Supplementary Paper 141-159.
6. Collepardi M., Fratesi R., Moriconi G., Pauri M. The influence of carbonation on the corrosion of steel in reinforced concrete. 2<sup>nd</sup>. Intern. Symp. Cement Concrete, 2, 185-197 (1989).
7. Koelliker E. Some observations on the carbonation of solution of Ca(OH)<sub>2</sub> and liquid phase of cement paste and the mechanism of carbonation of concrete. RILEM Inter. Symp. On Carbonation of Concrete. Fulmer, 1976.
8. Kokubu M., Nagataki S. Carbonation of concrete with fly ash and corrosion of reinforcement in 20-years test. In: Malhotra V.M. Ed. Proc. 3<sup>rd</sup>. Intern. Conference on fly ash, silica fume, slag and natural pozzolanas in concrete..Trondheim (1989). Amer. Concrete Inst. Special Publ. 114, I, 315-329.
9. McIand I. Carbonation in hardened fly ash cements. In: Malhotra V.M. Ed. Proc. Intern. Conference Blended Cements in Construction. 329, Scheffield (1991).
10. Copeland L.E., Kantro D.L. Hydration of Portland cement. Proc. 5<sup>th</sup> ICCS, II, 387-421. Tokyo (1968).
11. Fraay Al. A., Bijen J.M., de Haan Y.M. The reaction of fly ash in concrete: a critical examination. Cement Concrete Res., 19, 235-246 (1989).
12. Vennesland O., Giorv QE. Silica concrete-protection against corrosion of embedded steel. In: Malhotra V.M. Ed. Proc. 1<sup>th</sup> Intern. Conference on the use of fly ash, silica fume, slag, and other mineral by-products in concrete. Montebello (1983). Amer. Concrete Inst., Special Publ. 79, II, 719-729.
13. Roy D.M., Kumar A., Rhodes J.P. Diffusion of chloride and cesium ions in Portland cement pastes and mortars containing blastfurnace slag and fly ash. In; Malhotra V.M. Ed. Proc. 2<sup>nd</sup>

Intern. Conference of fly ash, silica fume, slag, natural pozzolanas in concrete. Madrid (1986). Amer. Concrete Inst., Special Publ. 91, II 1423-1444.

14. Sisomphon K., Franke L. Carbonation rates of concrete containing high volume of pozzolanic materials. *Cement Concrete Res.*, 37, 1647-1653 (2007).
15. ENV 197- 1 Common cement types and composition: proportion by mass.
16. Sersale R. Nuovi additivi chimici e loro ruolo nel calcestruzzo. *Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli*, 76 (2009).

## **Gli Anaglifi di Vuibert. Origine storica e applicazioni in didattica basata sui modelli di superfici matematiche.**

Nota di Nicla Palladino\*

Presentata dal socio Paolo de Lucia  
(Adunanza del 5 Giugno 2009)

*Key words: anaglyphs, models of surfaces, history of Mathematics.*

**Abstract** – This paper sketches out a brief history of the birth of *anaglyphs*, to their use in *virtual reality*. Role of virtual reality in didactical is considered and models of famous plastic surfaces that mathematicians built between XIX-th and the first thirty years of the XX-th century are carried out by anaglyphs. These models were used in several fields of pure and applied mathematics, in order to show results of researches or to teach "high mathematics".

**Riassunto** – Si traccia una breve storia della nascita degli *anaglifi*, fino all'uso odierno nella *realtà virtuale*. Si considera il ruolo del virtuale nella didattica e si danno alcune rappresentazioni, mediante anaglifi, di famose superfici, costruite in gesso tra l'Ottocento e gli anni Trenta del Novecento, per la ricerca e l'insegnamento delle "matematiche superiori".

### **1 – GLI ANAGLIFI GEOMETRICI DI VUIBERT**

Nel ripercorrere alcune tappe della storia della Matematica, talvolta sembra che vi si ritrovino idee tanto più attuali quanto ancora efficacemente utilizzabili in un contesto moderno.

Il matematico Henri Vuibert aveva fondato a Parigi (in Boulevard Saint Germain, n° 63), nel 1877 (sembra che egli fosse in quell'anno il più giovane "agrégé de mathématiques" di Francia), la libreria editrice *Vuibert et Nony* (poi libreria *Vuibert* che vive a tutt'oggi sotto questo nome) e, tra le diverse pubblicazioni scientifiche di cui fu direttamente autore e, in questo caso,

---

\* Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Salerno. Lavoro eseguito nell'ambito dell'assegno di ricerca *Metodi matematici e informatici per il trattamento dell'informazione*, responsabile prof. Vincenzo Loia.

editore, vi è il trattatello, *Les Anaglyphes géométriques*<sup>1</sup>, edito nel 1912, interamente dedicato ai principi ottici e alle applicazioni, alla geometria solida, degli *anaglifi* da lui pensati, allora, esclusivamente come un nuovo strumento utile per “un approccio intuitivo alla geometria”.

È forse il caso di ricordare che anche una personalità scientifica come quella di David Hilbert (1862-1943), a giusta ragione tanto celebrata pure per aver definito l’idea del moderno metodo assiomatico, ebbe forte attenzione per il punto di vista intuitivo; egli pubblicò, infatti, assieme con Stefan Cohn-Vossen (1902-1936), nel 1932, un volume di *Geometria intuitiva*, l’*Anschauliche Geometrie*<sup>2</sup>.

Per testimoniare, ancora, della considerazione goduta dalla tendenza “intuitiva”, si può ricordare l’affermazione di William Thomson (1824-1907), ben noto col titolo di Lord Kelvin, pronunciata nel pieno del clima positivista della seconda metà dell’Ottocento:

*Io non sono soddisfatto finché non ho potuto costruire un modello meccanico dell’oggetto che studio. Se posso costruire un tale modello meccanico, comprendo; sino a che non posso costruirlo, non comprendo affatto*<sup>3</sup>.

La prima parte dello scritto di Vuibert sugli anaglifi esplicita esaurientemente gli intenti dell’autore, il quale osserva, in linea preliminare, che una delle difficoltà nell’insegnamento della geometria deriva dal fatto che non è facile “vedere nello spazio” (“voir dans l’espace”) figure di corpi dei quali si disponga soltanto della loro rappresentazione nel piano, soprattutto quando queste figure piane sono di complicata espressione. Così può accadere che uno studioso riesca pure a comprendere e ad assimilare una dimostrazione matematica senza però familiarizzare con le corrispondenti figure della geometria dello spazio. Anche la geometria descrittiva, per quanto precisi meglio, con linguaggio convenzionale, la forma dei corpi solidi, spesso non è di grande aiuto. Monge ha detto –ricorda Vuibert– che la geometria descrittiva<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> H. Vuibert, *Les Anaglyphes géométriques*, Paris, Librairie Vuibert Boulevard Saint Germain, 63, 1912, 32 pagine.

<sup>2</sup> Berlin, Julius Springer; trad. ital. *Geometria intuitiva*, Torino, Paolo Boringhieri, 1960.

<sup>3</sup> “I am never content until I have constructed a mechanical model of the subject I am studying. If I succeed in making one, I understand; otherwise, I do not”, in W. Thomson, *Molecular dynamics and the wave theory of light: notes of lectures delivered at the Johns Hopkins University, Baltimore by Sir William Thomson, ... stenographically reported by A.S. Hathaway*, Baltimore (Maryland – U.S.A.), Johns Hopkins University, ca 1884.

<sup>4</sup> La quale, come si sa, serve a rappresentare nel piano oggetti dello spazio a tre dimensioni. Gaspard Monge (1746-1818) è ritenuto essere l’inventore di questa geometria. Nel 1795 si pubblicavano le sue *lezioni* di geometria descrittiva, date in quell’anno nella *Scuola Normale* di Parigi, inserite nelle *Séances des Écoles Normales recueillies par les sténographes et revues par les professeurs*, edite a Parigi, presso L. Reynier, nell’anno III della Repubblica, corrispondente

è una lingua necessaria all'uomo di genio che concepisce un progetto, a coloro che debbono dirigerne l'esecuzione e, infine, agli artisti che devono essi stessi eseguirne le diverse parti; ma, annota nello stesso tempo Vuibert, se con questo linguaggio si comunica e si comprende bene, esso è però ancora più difficile da apprendere di quello della geometria ordinaria o, almeno, è più difficile cogliere con chiarezza, nella loro disposizione spaziale, le figure espresse nella geometria descrittiva rispetto a quelle della geometria ordinaria.

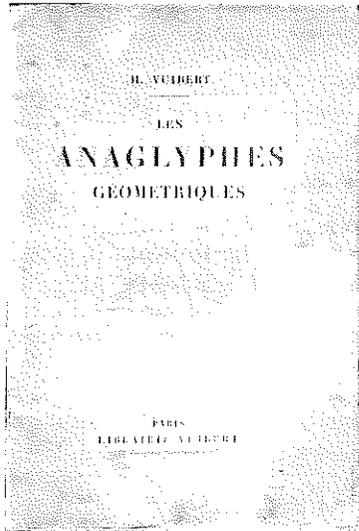


Fig. 1. Copertina del volumetto *Les anaglyphes géométriques* di Vuibert.

Per aiutare gli studenti a vedere nello spazio –ricorda ancora Vuibert– si sono costruite materialmente, in tre dimensioni, le principali figure sia della geometria ordinaria sia della geometria descrittiva; un aiuto prezioso per gli studenti, specialmente quando sono proprio essi a costruire questi modelli materiali. Ma le collezioni che sono state realizzate hanno un prezzo molto alto, non sono facilmente disponibili e possono contare solo su un numero limitato (per quanto cospicuo) di modelli. Inoltre, se i modelli solidi sono in legno, gesso, o cartone, ecc., di essi se ne vede solo la forma esteriore poiché non è possibile osservare tutti gli elementi interni e le linee di costruzione; se invece sono confezionati con fili, la loro fragilità non ci permette di

---

per l'appunto al 1795; poi ripubblicate a parte, a cura di J.-P.-N. Hachette, nel 1799, a Parigi, col titolo di *Géométrie descriptive*.

manipolarli; e, qualunque sia il modo di costruirli, le linee non si possono “intrecciare all’infinito” perché la fabbricazione diventerebbe difficile e troppo costosa.

Il problema sembrava insolubile finché, scrive Vuibert, Henri Richard – preside del Liceo della città francese di Chartres– trovò una soluzione elegante e definitiva: egli non costruì materialmente gli oggetti corrispondenti alle figure geometriche, bensì disegnò le figure stesse in modo che l’osservatore avesse l’illusione, guardandole, che al loro posto corrispondessero oggetti autenticamente reali, sviluppati in tre dimensioni (realizzando così l’ “effetto rilievo”), vale a dire disegnò degli *anaglifi*, parola proveniente dall’antica lingua greca<sup>5</sup>.

Anaglifi, tracciati geometricamente a mano, in numero di circa quaranta, realizzati da Henri Richard, furono esposti –riferisce Vuibert nel suo libretto– al Quinto Congresso Internazionale dei Matematici, tenutosi dal 22 al 28 agosto del 1912, a Cambridge, in Inghilterra.<sup>6</sup>

Le idee di Vuibert sull’uso degli anaglifi nella didattica della matematica ebbero una notevole diffusione anche in Italia. Così, ad esempio, Roberto Marcolongo<sup>7</sup>, nel 1921, in occasione del Congresso nazionale della Società *Mathesis*<sup>8</sup> a Napoli, scriveva:

“In ogni scuola, di qualsiasi grado, accanto ai gabinetti di fisica, di chimica, di scienze naturali, di disegno, di topografia, ecc., vi deve essere quello di Matematica”.

E invitava i professori ad abituare gli studenti a far uso dei “semplici e antichissimi strumenti”, tra i quali gli *anaglifi geometrici* di Vuibert ed, in generale, del disegno nello studio di tanti argomenti della matematica, dai più elementari a quelli un po’ più complessi, dicendo:

---

<sup>5</sup> Il termine greco αναγλυφή vuole dire lavoro in basso rilievo, cesellatura. Esso fu scelto da Ducos du Hauron del quale si dirà più oltre.

<sup>6</sup> Sul congresso si veda Hobson, E.W. and Lowe, A.E.H. (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 22-28 August 1912)*, 2 volumes, Cambridge University Press, 1913.

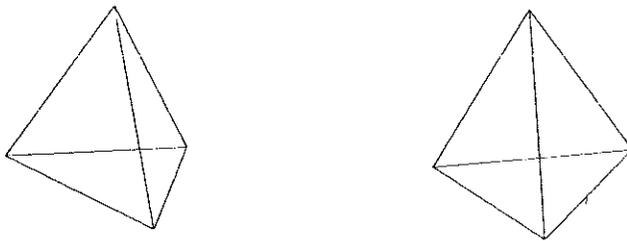
<sup>7</sup> Su R. Marcolongo (1862-1943), fisico-matematico che ebbe, tra l’altro, un ruolo fondamentale per la diffusione in Italia della teoria della relatività, si può vedere la biografia, scritta da lui stesso, dal titolo *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, S.I.E.M. – Stabilimento Industrie Editoriali Meridionali, 1935; e F.G. Tricomi, *Matematici Italiani del Primo Secolo dello Stato Unitario*, «Memorie dell’Accademia delle Scienze di Torino – Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali», Serie 4<sup>a</sup>, n. 1, 1962, *ad vocem*.

<sup>8</sup> Roberto Marcolongo, *Materiale didattico ed esperienze nell’insegnamento. Discorso tenuto al Congresso della Società Mathesis a Napoli il 16 Ottobre 1921*, «Giornale di Matematiche di Battaglini», LX (1922), pp. 1-14.

“La pazienza e l’abilità di ottenere un disegno bello ed esatto; le dimensioni stesse del disegno ben più ampie di quelle del testo; la diversa colorazione delle parti del disegno; le piccole questioni che il giovane disegnatore deve superare da sé in ogni momento; insomma queste prime esperienze geometriche, non solo sviluppano, acuiscono il senso estetico e geometrico, non solo possono promuovere la invenzione geometrica, e la discussione dei problemi, ma danno una sicurezza ed una padronanza della materia che difficilmente si acquisterebbe in altro modo”.

## 2. - LE TECNICHE PER LA COSTRUZIONE DEGLI ANAGLIFI

Il modo di rappresentare gli oggetti utilizzato da Richard si basa sull’ordinario meccanismo di visione tridimensionale, mediante i due occhi, di cui gli uomini sono dotati. Si sa che gli oggetti poco lontani non sono visti da ciascun occhio (la distanza tra le pupille è di circa 6-7 centimetri) sotto lo stesso aspetto o, come pure si dice, sotto la stessa prospettiva; per questa ragione Vuibert porta, quali esempi, delle immagini (qui di seguito riprodotte): la figura 2 rappresenta un oggetto, un tetraedro regolare, così come lo vede l’occhio sinistro, mentre il destro resta chiuso; la figura 3 riporta il medesimo tetraedro come appare, invece, all’occhio destro, mentre il sinistro resta chiuso. Le due immagini sono sensibilmente diverse; ma, se si guarda il tetraedro con i due occhi aperti, accade che il cervello le elabora –cosa che ordinariamente fa per offrire una visione tridimensionale di tutti gli oggetti che sono posti davanti agli occhi– in modo tale da fonderle in una sola che ci presenta l’oggetto originario, vale a dire il tetraedro, con il suo rilievo.



Figg. 2 e 3. Tratte da *Les anaglyphes géométriques*.

Vuibert, anche sulla scia delle ricerche nate dagli studi di Helmholtz, fornisce, nella sua esposizione, utili notizie che sono servite da base per le schematiche informazioni, che ora si presentano, su alcune tecniche –esse

partono tutte dall'impiego della macchina fotografica – per la formazione di immagini in due dimensioni che diano l'illusione di avere di fronte agli occhi oggetti in rilievo, fino alla tecnica che permette di realizzare propriamente degli anaglifi.

Una prima tecnica consiste nel sistemare sopra un tavolo l'oggetto – di cui si vogliono immagini, stampate su foglio, capaci di fornire l'effetto rilievo – e scattare due successive fotografie (che danno ovviamente immagini a due dimensioni) dello stesso oggetto: eseguito il “primo scatto”, il secondo viene fatto dopo aver spostato, subito poi, la macchina fotografica sul piano orizzontale (in pratica, parallelamente al bordo del tavolo), di una distanza uguale alla distanza mediamente sussistente tra i due occhi di un essere umano.

Questo passo della procedura si può eseguire anche mediante il *Verascope*, un esemplare del quale, con marchio *Richard* – ma si tratta di Jules Richard – è raffigurato nello scritto di Vuibert<sup>9</sup>.

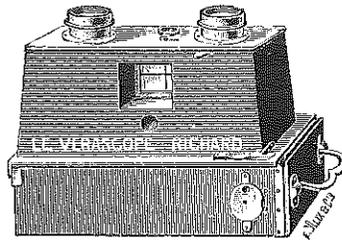


Fig. 4. Disegno del *Verascope* in *Les anaglyphes géométriques*.

Per compiere il passo successivo bisogna ottenere innanzitutto, per sviluppo, il “positivo” (d’ora in poi si preferirà dire *fotogramma*) delle due congiunte fotografie, delle quali la macchina fotografica ha dato solo il “negativo”. I due fotogrammi, che sono affiancati sulla stessa superficie piana non coincidono, naturalmente, quando si osservino i primi piani delle figure che rappresentano ma vengono a coincidere solamente per i piani lontani. E questo fatto bisogna che sia tenuto sempre ben presente. Ora, mediante un

---

<sup>9</sup> In pratica il *Verascope* era un apparecchio a doppia macchina fotografica, ciascuna col suo obiettivo. Gli obiettivi, affiancati, erano posti a distanza tale da essere uguale alla distanza media che passa tra gli occhi umani ed erano comandati da un unico pulsante. Esso fu costruito e brevettato, nel 1891, da Jules Richard (1848-1930), a Parigi, e i primi modelli entrarono in circolazione nel 1893 (su questo autore si può anche vedere Jacques Perin, *Jules Richard et la magie du relief*, vol. 1, Mialet (France), Cyclope, 1993, vol. 2, Paris, 1997, vol. 3, Paris, 2001.

cauto spostamento all'indietro (rispetto agli occhi dell'osservatore) degli stessi fotogrammi si può realizzare "ad occhio nudo"<sup>10</sup> l'effetto rilievo: vale a dire la sensazione di avere davanti agli occhi ancora l'oggetto originario con le sue tre dimensioni.

Anche quest'ultimo passo della procedura può essere compiuto mediante un apparecchio, e cioè mediante uno *stereoscopio*: i due fotogrammi (le "positive") precedenti, affiancati (costituiscono così uno *stereogramma*) sono inseriti in un piccolo telaio a cui, di fronte, sono connessi un paio di occhiali con lenti di ingrandimento aventi gli assi leggermente convergenti tali da produrre, rimandando all'indietro le due immagini (le "positive") e deviandole fino a sovrapporsi, il desiderato effetto rilievo<sup>11</sup>. È questa, essenzialmente, la

<sup>10</sup> Vuibert fornisce un rapidissimo cenno della visione stereoscopica "ad occhio nudo", mentre molto più dettagliata è la descrizione che si trova esposta, per esempio, da G. Carboni nell'articolo *Costruiamo uno Stereoscopio*, in *Fun Science Gallery* (<http://www.funsci.com/>) che qui si riporta:

"I due stereogrammi [le due "positive", n.d.r.], delle dimensioni di 6 x 9 cm circa, vanno tenuti affiancati. Appoggiate la coppia [di stereogrammi, n.d.r.] sugli occhi, a contatto del naso. A questo punto ogni occhio vede l'immagine che gli sta di fronte. Di conseguenza vedrete un'unica immagine, estremamente sfocata. Non cercate di metterla a fuoco. Allontanate il foglio di circa 10 cm e fermatevi. Ora dovrete vedere 3 immagini, molto sfocate. Ogni occhio ne vede due, ma quella centrale è dovuta alla fusione delle due "interne". Se l'immagine centrale dovesse essere in parte dissociata, attendete, rilassando gli occhi, finché le due parti non si saranno sovrapposte. Ora bisogna allontanare lentamente il foglio, finché l'immagine centrale non diventerà nitida. Se tenderà a dissociarsi, fermatevi e aspettate che si ricomponga. Quando vedrete l'immagine centrale a fuoco e bene fusa, apparirà in 3 dimensioni, come sospesa nello spazio. Vi sembrerà che il supporto di carta su cui le immagini si trovano, sia scomparso. L'effetto è sorprendente. La prima volta è un poco difficoltoso riuscire nell'impresa di vedere un'immagine stereoscopica senza l'uso di strumenti, ma le successive saranno molto più facili. Tenete presente che riviste scientifiche come *Science* e *Nature* riportano spesso immagini stereoscopiche di molecole. Le chiamano "StereoView". Non danno nessuna indicazione sui metodi per la loro osservazione, tanta è la familiarità dei lettori di queste prestigiose riviste nei confronti delle rappresentazioni stereoscopiche, che riescono ad osservare anche ad occhio nudo. L'impiego di occhiali da lettura può facilitare questa operazione." Si ricorderà che le lenti d'ingrandimento, utilizzate anche per la lettura, sono quelle convesse, cioè quelle in cui, nella concezione classica, la curvatura di almeno una delle due facce corrisponde alla curvatura di una sfera. Una lente convessa ha il potere di far convergere in un punto un fascio di raggi paralleli che le colpisca ed è quindi detta anche lente convergente.

<sup>11</sup> Nello stesso articolo di Carboni è detto:

"L'apparecchio può essere dotato di 2 lenti di ingrandimento della focale di 30 cm, per persone dalla vista normale. I miopi preferiscono lenti più leggere o nulla, gli ipermetropi lenti più forti. La presenza delle lenti facilita l'uso dello strumento, ma non è indispensabile. In effetti i muscoli che regolano la convergenza degli occhi e quelli che regolano la messa a fuoco, pur essendo distinti, sono abituati a lavorare in modo congiunto. Adesso noi stiamo chiedendo agli occhi di restare paralleli, come se guardassero qualcosa lontano, mentre devono mettere a fuoco a 30 cm di distanza. Questa operazione è dunque facilitata dalla presenza di lenti di ingrandimento che permettono di tenere gli occhi accomodati all'infinito mentre osservano

“fotografia stereoscopica” che applicata, ad esempio, per rilievi aerei consente rappresentazioni tridimensionali, utilizzate nella preparazione delle carte geografiche su cui sono tracciate le curve di livello. La tecnica della fotografia stereoscopica fu adottata da Christian Wiener (1826-1896) –sul quale si ritornerà al pf. 4– per ritrarre il modello in gesso della superficie, famosa nell’ambito degli studi di geometria-algebrica, del terzo ordine che va sotto il nome di *Superficie diagonale di Clebsch*, con le sue 27 *rette reali*, modello che lui stesso aveva realizzato su ispirazione di Alfred Clebsch (1833-1872). Wiener pubblicò pure un corrispondente opuscolo, *Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Mit erläuterndem Texte*, nel 1869,<sup>12</sup> in cui erano presentate due fotografie stereoscopiche della *Superficie diagonale* accompagnate da otto pagine di commento.

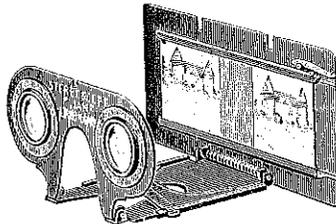


Fig. 5. Disegno dello *Stereoscopio* in *Les anaglyphes géométriques*.

La seconda tecnica è dovuta al fisico tedesco Wilhelm Rollmann (1821-1890) di Stralsund, in Prussia, il quale trovò, nel 1853, un metodo molto ingegnoso per ottenere l’effetto rilievo senza far uso dello stereoscopio. Egli pensò di proiettare, separatamente e simultaneamente, i due fotogrammi dello stereogramma, l’uno sopra l’altro, su di uno schermo, facendo passare però i raggi di proiezione di uno dei due fotogrammi attraverso un vetro di un certo colore  $C$  (per esempio, rosso) e i raggi di proiezione dell’altro attraverso un vetro di colore  $C'$  (per esempio, verde): in tal modo i due fotogrammi,

---

oggetti vicini. In mancanza di queste lenti, potete utilizzare anche occhiali da lettura. Molte persone riescono a utilizzare convenientemente lo strumento anche privo di lenti e senza impiegare occhiali.”

<sup>12</sup> Leipzig, B.G. Teubner. Chr. Wiener, professore di Geometria descrittiva alla *Technische Hochschule* (poi *Technische Universität*) di Karlsruhe, dal 1852 al 1896, aveva cominciato a costruire modelli in gesso di superfici matematiche fin dal 1865.

sovrapposti, di uno stereogramma vengono a colorarsi con colori diversi formando perciò una *coppia stereoscopica* che può essere già considerata un anaglifo. Gli spettatori, attrezzati con degli *anaglittoscopi*, vale a dire con degli occhialini con vetri, di cui uno del colore  $C$  e l'altro del colore  $C'$  (per questo esempio, verde il vetro sinistro e rosso il destro: il riferimento è dato considerando gli occhialini così come li vede lo spettatore quando li ha inforcati agli occhi), osservano le immagini proiettate sullo schermo (la coppia stereoscopica): a questo punto, se essi guardassero con un occhio alla volta, non percepirebbero, con ciascun occhio, che una sola proiezione e la vedrebbero nera, mentre con tutte e due gli occhi schiusi vedono un'unica immagine, in rilievo, dell'oggetto iniziale.

L'idea delle proiezioni "fugaci" di Rollmann troverà una maggiore evoluzione negli anaglifi "durevoli" di Arthur-Louis Ducos du Hauron (1837-1920). Questi pensò (brevettando il metodo nel 1891) di sovrapporre l'uno sull'altro, spostandoli orizzontalmente sul piano di appoggio, i due distinti fotogrammi, i quali erano stati già colorati, della coppia stereoscopica, fino a sovrapporli: l'immagine finale così ottenuta fu chiamata, proprio da questo autore, *anaglifo*.

Un semplice anaglifo si può realizzare, per esempio, colorando le linee con cui sono tracciati i due tetraedri delle figg. 2-3 (in rosso per la fig. 2, che sta a sinistra, e in verde per la fig. 3, che sta a destra) e sovrapponendo le figure stesse. Si viene a comporre una "figura anaglifca" che osservata con gli occhialini bicolori (aventi, per esempio, il vetro sinistro verde e il vetro destro rosso) farà apparire il tetraedro originario in rilievo.

Volendo analizzare brevemente ma più in dettaglio il fenomeno della visione anaglifca, bisogna partire da un anaglifo realizzato, per esempio, con i colori rosso e verde e stampato su di un foglio bianco. Inforcando gli occhialini, già descritti, si innesca il seguente processo. All'occhio destro la figura in verde appare nera su sfondo rosso (chiaro) mentre la figura rossa, non distinguendosi più dallo sfondo rosso, è come se venisse cancellata. Allo stesso modo il fenomeno procede per l'occhio sinistro (schermato dal vetro verde dell'occhialino): la figura in rosso appare nera su sfondo verde (chiaro), mentre la figura verde viene cancellata. A questo punto si produce, elaborato dal cervello, l'effetto rilievo: lo sfondo, che dall'occhio destro era percepito di un colore rosso chiaro e dal sinistro invece in verde chiaro, assume una tinta neutra, scompare, mentre appare ergersi solo la figura dell'oggetto originario nelle sue tre dimensioni.

Per un solido geometrico reale, quale un tetraedro  $T$  di generico punto  $O$  (fig. 6), il fenomeno della visione anaglifca si può descrivere al seguente modo. Si è detto che uno stesso oggetto, come può essere  $T$ , non è visto da ciascun occhio (in figura,  $S$  è il sinistro e  $D$  il destro) sotto la stessa prospettiva,

per cui il generico punto  $O$  del tetraedro reale corrisponde alle posizioni, pur esse generiche, che si vogliono denotare con  $O_S$ , per la visione con l'occhio sinistro  $S$ , e  $O_D$  per l'occhio destro  $D$  (la distanza  $O_S O_D$  sarà lo "scarto" tra le due posizioni o proiezioni). Posizioni che sono raccolte sul piano  $P$  e costruite per intersezione dei raggi visivi, passanti rispettivamente per  $SO$  e  $DO$ , con lo stesso piano. Siano chiamate con  $T_S$  e  $T_D$  le intere immagini prospettiche cui appartengono, rispettivamente, i punti generici  $O_S$  e  $O_D$ . Si colorino  $T_S$  e  $T_D$ , rispettivamente, in verde e in rosso. Se si allontana il tetraedro reale e si guardano le due immagini con occhialini aventi il vetro verde a sinistra e quello rosso a destra, il tetraedro reale ritorna come immagine virtuale: il generico punto reale  $O$  del tetraedro è ora rioccupato dal corrispondente *punto-immagine* virtuale.

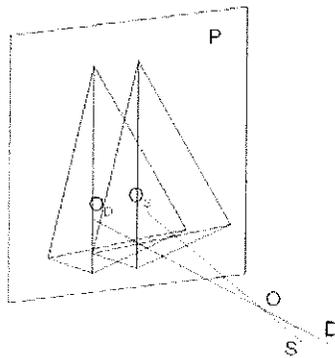


Fig. 6.

La fig. 7, ristretta allo studio del punto  $O$ , completa l'analisi del fenomeno.

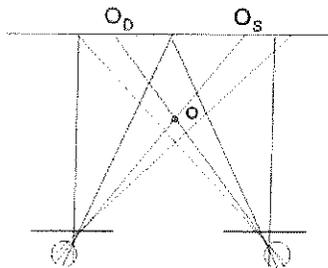


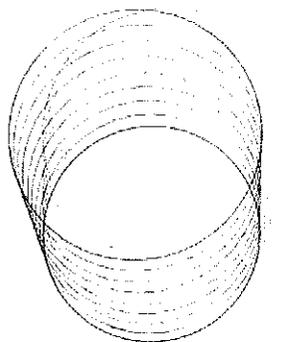
Fig. 7.

Immaginando la lente sinistra di colore verde e la lente di destra di colore rosso, quando si guarda l'immagine attraverso l'occhialino bicolore, il punto  $O_D$  del disegno, colorato in verde, è invisibile per l'occhio sinistro così come il punto  $O_S$ , in rosso, è invisibile per l'occhio destro. Il punto  $O_S$  appare nero all'occhio sinistro e, allo stesso modo, il punto  $O_D$  appare nero all'occhio destro. Entrambi gli occhi vedono solo quello che dovrebbero vedere se un oggetto reale apparisse alla posizione  $O$ .

### 3. - UN'INTRODUZIONE AL METODO GEOMETRICO

Un anaglifo guardato senza gli appositi occhialini (*anaglittoscopi*) appare solo come una immagine confusa e sbiadita: la sovrapposizione dei colori sfuma e sfigura tutta l'immagine; ma inforcati gli occhialini, lo spettacolo cambia completamente: la figura cessa di essere "doppia", i colori scompaiono e si vede una immagine semplice, netta, dentro la quale si rivelano le distanze, le sporgenze, le rientranze.

Tra le applicazioni degli anaglifi vi è, si è detto, la rappresentazione di figure della geometria nello spazio. È il disegno, in aiuto al calcolo, che fornisce gli elementi della figura: la doppia prospettiva è tracciata su un foglio bianco. Osservando l'immagine con gli occhialini, la superficie bianca che serve da supporto svanisce e il solido geometrico si stacca, avanzando verso lo spettatore, lasciandosi dietro sia le facce che le linee, planando nello spazio come se fosse un modello materiale a tre dimensioni.



H.

\* gl'ndic de \*

Fig. 8. Una pagina del lavoro di Vuibert che riproduce l'anaglifo di un cilindro.

In verità, specifica Vuibert, l'immagine non si rivela tutta d'un colpo all'osservatore non esercitato. Anche con un disegno ben costruito ed una luce abbastanza intensa, ci vuole spesso un istante d'attesa; quando l'accomodamento avviene, il cervello riunisce le due immagini, si comincia a riconoscere la figura; ma bisogna munirsi ancora di un po' di pazienza e continuare ad applicarsi per *godere* veramente dell'anaglifo: in certi momenti lo si può vedere sollevarsi, sembra di poterlo toccare con la mano. È una visione che colpisce in modo strano. La rapidità e la perfezione della visione di un anaglifo dipendono essenzialmente, per alcuni individui, dalla qualità della sua vista. Delle persone lo vedono quasi istantaneamente; alla maggior parte è necessario esercitarsi; altre, infine, non riescono mai a vederlo.

Opposta è la disposizione, al fine di ottenere lo stesso effetto di fluttuazione nello spazio, che si realizza con un *foglio per disegnare in 3D* (ovvero *3D drawing sheet*). In questo caso il foglio anziché essere bianco è fittamente quadrettato mediante linee rosse e verdi, orientate trasversalmente: è come se sul foglio si fossero quasi sovrapposti, orientandoli trasversalmente, due fogli di carta millimetrata, sfalsati di circa un millimetro, l'uno a linee rosse e l'altro a linee verdi; tracciando, con una normale penna a biro, preferibilmente di colore nero, una figura, se si vuole geometrica (per esempio, un prisma o una piramide) si vede, inforcando gli "occhialini rosso/verde", la figura sollevarsi dal foglio (che continua ad essere visto) e stagliarsi nello spazio.

Procedendo più innanzi nel suo trattatello, Vuibert dà un cenno al metodo geometrico per la costruzione di anaglifi.

Si consideri la ricerca della costruzione del punto  $O$ , punto-immagine, generico, dell'intera figura solida, virtuale, da costruire, note le posizioni  $O_S$ , per la visione con l'occhio sinistro  $S$ , e  $O_D$  per l'occhio destro  $D$ , impresse sul piano  $P$  (quindi noto lo "scarto"  $O_S O_D$  tra le due proiezioni). Dalla similitudine dei triangoli  $OSD$  e  $OO_S O_D$  possiamo dedurre la relazione:

$$\frac{\overline{O_S O_D}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{OS}},$$

da cui, per la proprietà del componendo, di cui godono le proporzioni, si ha:

$$\frac{\overline{O_S O_D}}{\overline{SD + O_S O_D}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{OS + OO_S}} = \frac{\overline{OO_S}}{\overline{SO_S}};$$

da quest'ultima si ricava infine  $\overline{OO_S}$ :



Scopo della realtà virtuale (*VR*) è quello di ricreare, sulla base di opportuno software affidato al computer, mondi e oggetti che sono la trasposizione digitale di ambienti reali o fantastici, in cui valgono l'interattività con il fruitore, la risposta del sistema in tempo reale e l'immersione.

La realtà virtuale, per sua stessa natura, assegna un ruolo centrale alle rappresentazioni visive, che possono ricoprire delle funzioni sia di facilitazione che di sostegno nei confronti degli altri tipi di rappresentazione simbolica: migliorano la comprensione, la rendono più rapida, permettono una più solida ritenzione, favoriscono la messa in evidenza di certi elementi; consentono di compiere delle operazioni mentali che non sarebbero eseguibili, o che lo sarebbero con difficoltà e/o con minor successo, attraverso le parole.

Per gli aspetti didattici, l'insegnante ha, attualmente, a sua disposizione numerosi nuovi strumenti che può utilizzare al fine di facilitare l'apprendimento da parte dello studente: *ipermedialità, reti e realtà virtuale*, i quali si associano e si fondono con i nuovi interessi che conducono alla costruzione della conoscenza, al cognitivismo, alla creatività.

In particolare, la *VR* deve essere intesa come un ambiente di apprendimento nel quale è possibile procedere alla costruzione di abilità percettivo-motorie e di concettualizzazioni logico-simboliche. Partendo dal presupposto che la conoscenza si costruisce, la realtà virtuale è, per sua struttura, idonea a costruzioni basate su dinamiche cognitive, fondate su un processo di apprendimento di tipo collaborativo e costruttivista. In questo contesto, le attività di *simulazione* giocano un ruolo fondamentale per perseguire tale obiettivo.

Sono numerosi gli studi che concordano sul fatto che la realtà virtuale ha un grande ruolo nell'insegnamento scolastico: le ragioni per usare la realtà

---

avviarsi verso gli spettatori, procurando loro un notevole sconcerto. Pur non potendo parlare ancora di "cinema 3d", si suole considerare la proiezione del film dei fratelli Lumière come inizio del cinema atto a creare la sensazione della terza dimensione. Per notizie su questo tema si può vedere il breve excursus storico sull'evoluzione delle tecniche stereoscopiche e sulle applicazioni in campo cinematografico e televisivo, dal titolo *Stereoscopia. Origini, cinema, televisione*, redatto da M. Barbero e M. Muratori, apparso su «Elettronica e Telecomunicazioni», n° 2, 2004 (reperibile anche in <http://www.crit.rai.it/elete/2004-2/42-1.pdf>).

<sup>14</sup> In quest'ultimo campo, recente è, per esempio, la realizzazione di un filmato in cui, attraverso la tecnica di visualizzazione stereoscopica, lo spettatore diventa visitatore condotto a girare per il sito virtuale (la sua origine reale risale all'età romana, eruzione del Vesuvio del 79 d. C.) di Moregine, a sud di Pompei. La realizzazione è stata coordinata dai professori Michele Nappi e Andrea Abate del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Salerno. Nappi è stato anche il relatore della tesi di laurea *Moregine: I beni culturali incontrano le nuove tecnologie*, redatta da Valerio Pappacena, corso di laurea in Scienze dell'Informazione, a.a. 2004-'05, Università degli Studi di Salerno. Scopo della tesi è stato quello di offrire una completa ricostruzione del sito archeologico (luoghi, oggetti, persone) usufruibile mediante una visita virtuale in un ambiente *VR* totalmente immersivo.

virtuale possono essere paragonabili a tutte le motivazione che si proporrebbero per usare la simulazione educativa bidimensionale assistita dal calcolatore, oggi abbastanza utilizzata nelle scuole, con la differenza che nello spazio tridimensionale, gli oggetti con cui l'utente può interagire sono molto più simili a quelli reali. Inoltre, i programmi di *VR* possono essere altamente motivanti, mentre il rischio di passività risulta pressoché impossibile: uno studente impegnato con un programma di realtà virtuale non può comportarsi da osservatore, la partecipazione attiva coinvolge l'utente nell'azione che è richiesta, gli alti livelli di interazione e individualizzazione promuovono un intenso interesse.

In definitiva, sembrano essere molteplici e diverse le ragioni per usare la realtà virtuale nell'educazione, poiché essa fornisce motivazione allo studente; può illustrare più accuratamente alcune caratteristiche o processi rispetto ad altri strumenti; consente di esaminare un oggetto da vicino, anche quando non se ne ha la disponibilità materiale; offre più possibilità all'intuizione; consente all'alunno di procedere secondo i propri tempi; richiede l'interazione, incoraggiando quindi la partecipazione attiva piuttosto che passiva; risulta uno strumento particolarmente gradito all'alunno e stimolante per l'apprendimento. Offre una nuova forma di esperienza che può essere al contempo divertente ed educativa.

Rory Stuart e John C. Thomas<sup>15</sup> elencano diverse *funzioni del virtuale nell'educazione*, che riguardano l'uso della realtà virtuale in una classe di studenti:

1. esplorare luoghi e cose esistenti ai quali gli studenti non avrebbero alcuna possibilità di accedere;
2. esplorare cose reali che, senza modificazioni di tempo e grandezza, non potrebbero essere in alcun modo esaminate: ci sono un certo numero di curricula di *VR* che usano l'alterazione della grandezza o del tempo per conoscere gli oggetti;
3. creare luoghi e cose con caratteristiche modificate;
4. interagire con persone che sono in posti remoti del mondo, per condividere un interesse comune o per collaborare a progetti tra studenti;
5. interagire con una persona reale in modalità non-realistiche;
6. creare e manipolare rappresentazione concettuali astratte, come strutture di dati e funzioni matematiche.

Ancora, gli stessi studiosi affermano che ci sono almeno *due tipi di rappresentazioni nel virtuale*:

1. uso di scene naturalistiche per mostrare oggetti, attributi e relazioni;

---

<sup>15</sup> R. Stuart - J. Thomas, *The implications of education in cyberspace*, «Multimedia Review», vol. 2, n° 2, 1991, pp. 17-27.

2. uso di scene astratte nelle quali gli oggetti, gli attributi e le relazioni non sono come essi appaiono nel mondo reale, ma sono progettati per sottolineare relazioni concettuali.

Numerose sono le ricerche nell'ambito didattico coinvolgenti la realtà virtuale condotte per determinare se esiste «una relazione tra il percepito realismo delle immagini realizzate con la computer grafica e l'abilità dei bambini nota di risolvere i problemi spaziali». Tra queste, vengono proposti studi<sup>16</sup> che includono l'uso di sistemi per la realtà virtuale, ossia di *simulazione virtuale*. I bambini possono adoperare un sistema che permette loro di “entrare”, “volare” e “muovere” oggetti in diversi ambienti virtuali. Le conclusioni di tali studi sono state, riassunte in poche parole, che «il cyberspazio è altamente promettente e merita un ampio sviluppo come strumento educativo». Ancora, vengono suggeriti come ulteriore utilizzo della *VR* nella scuola un «sistema di realtà mediata dal calcolatore»<sup>17</sup>, nel quale l'utente interagisce con l'interfaccia del computer in un determinato luogo, mentre i comandi sono eseguiti, anche tramite un robot, in un altro luogo.

Le tecnologie oggi a disposizione e l'uso dei computer possono estendere e potenziare la funzione della scoperta come strategia didattica, proprio perché, come detto, dispongono della risorsa che sembra fatta apposta per esaltarne le prerogative: la simulazione.

L'uso della realtà virtuale può influenzare e trasformare l'apprendimento modificando fundamentalmente i contenuti di una materia e il modo in cui essa può essere insegnata e appresa. Per quanto concerne l'apprendimento, va osservato che la realtà virtuale, oltre ad ampliare le possibilità di accesso all'informazione, facilita la *comunicazione*, la *condivisione* e la *collaborazione* fra soggetti anche distanti permettendo la creazione di vere e proprie *comunità virtuali di apprendimento*.

## 5 - GENERAZIONE DI ANAGLIFI RELATIVI AI MODELLI DI SUPERFICI MATEMATICHE NELLA REALTÀ VIRTUALE

L'uso (anche molto sofisticato) che attualmente si fa degli anaglifi nella comunicazione per immagini, nel campo dell'informatica, ha fornito lo stimolo a rappresentare, mediante anaglifi, alcuni famosi modelli di superfici, in origine

---

<sup>16</sup> M.L. Merickel, *The Creative Technologies Project: Will Training in 2D/3D Graphics Enhance Kids' Cognitive Skills?*, «Technological Horizons in Education», vol. 18, 1990, pp. 55-58.

<sup>17</sup> Sandra Helsel, *A special issue on developing, applying, and evaluating the new Multimedia*, «Educational Technology Publications», vol. XXXII, 1992, pp. 38-42.

costruiti prevalentemente in gesso, e ideati da matematici e scienziati di prima grandezza tra la seconda metà dell'Ottocento e gli anni Trenta del Novecento<sup>18</sup>.

### 5.1 - UN CENNO STORICO AI MODELLI DI SUPERFICI PRODOTTI DALLA SECONDA METÀ DELL'OTTOCENTO AGLI ANNI TRENTA DEL NOVECENTO

I modelli di superfici matematiche a cui si è accennato sono quelli che vennero costruiti tra la seconda metà del XIX secolo e i primi decenni del XX e utilizzati soprattutto nella didattica delle «matematiche superiori»; modelli che servivano anche a *far vedere* proprietà notevoli del tema di ricerca su cui si investigava e a *mostrare* alcuni risultati che progressivamente si conseguivano in diversi settori delle matematiche “pure” e “applicate”: Geometria descrittiva e proiettiva, Geometria analitica, Geometria algebrica, Topologia, Teoria delle funzioni (anche a variabile complessa), Meccanica razionale, Fisica-matematica, Scienze delle costruzioni (senza dimenticare il loro impiego anche per scopi architettonici, scenografici, scultorei). I materiali impiegati per la costruzione erano diversi: ottone, gesso, filo di ferro o di fibra naturale, lamelle di legno, cartone, celluloidi ed altri metalli.

Inizialmente la loro produzione era realizzata artigianalmente, soprattutto presso i laboratori annessi agli Istituti universitari; in seguito, grazie agli stessi Istituti ed al sorgere di laboratori extra-universitari, la diffusione dei modelli ebbe un notevole incremento, tanto che sorsero apposite case editrici le quali s'incaricarono, tra l'altro, di approntare dei cataloghi a stampa che venivano progressivamente aggiornati.

Alcuni modelli di questo tipo cominciarono ad essere costruiti in Europa in rapporto alle esigenze della Geometria descrittiva e, successivamente, proiettiva. La Francia (principalmente Parigi) fu il paese in cui vennero alla luce le prime collezioni, ma, superata la metà del secolo, si registra la forte attenzione che, presso vari centri culturali del Regno Unito, veniva prestata a tali modelli. Pochi anni dopo l'unificazione della Germania (1871), il fenomeno assunse un rilievo enorme: venne organizzata e ulteriormente

---

<sup>18</sup> Modelli matematici per i quali nell'articolo di N. Palladino (con F. Palladino), *Le Raccolte Museali Italiane di Modelli per l'Insegnamento delle Matematiche Superiori. Catalogo generale e sito Web*, «Nuncius» (Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze), vol. XVI, 2001 sono dati i riferimenti conclusivi di un lavoro di indagine e di studio durato molti anni e, in aggiunta, è pure offerta un'ampia bibliografia nella quale sono elencati pubblicazioni che documentano in qual modo gli stessi modelli, oltre a celebrare veri e propri traguardi con cui era scandita tanta parte della ricerca nelle scienze matematiche, avessero frequentemente una notevole espressione estetica e fossero fonte di ispirazione per pittori, scultori, scenografi, architetti.

incentivata la produzione degli istituti matematici, fisici, tecnico-meccanici e geodetici esistenti presso le università e i politecnici germanici e, quindi, una ditta (una casa editrice: quella di Ludwig Brill, fondata a Darmstadt nel 1877, poi continuata da Martin Schilling in Halle an der Saale, dal 1899, e successivamente trasferita a Lipsia fino al termine della sua attività, avvenuto negli anni Trenta del XX secolo) divenne centro di raccolta, con un catalogo unico suddiviso per serie formate quasi sempre da modelli scientificamente affini i quali venivano ideati e, spesso, costruiti presso una certa sede sotto la guida di un professore<sup>19</sup>: la distribuzione, specialmente dei modelli in gesso, si irradiò così per la Germania, successivamente per l'Europa e, verso la fine dell'Ottocento, massicciamente si diffuse anche negli Stati Uniti d'America e persino in Giappone (intorno al 1910).

Iniziative importanti sono da segnalare in Francia: negli anni Venti del XIX secolo, quella di Irmond Bardin<sup>20</sup> e quella di Théodore Olivier<sup>21</sup> che costruì una serie di modelli in filo di superfici rigate, per alcune delle quali la conformazione non era fissa ma era possibile variarla. Più ampia e consistente fu l'impresa di Charles Muret<sup>22</sup>, autore di *Collections* delle quali fu edito un *Catalogue*, contenente almeno 323 realizzazioni, diffuso dall'editore parigino Charles Delagrave.

Alcuni appuntamenti espositivi di particolare rilevanza permettono di avere una misura degli interessi dei matematici. Uno di questi fu promosso in Gran Bretagna dal *Dipartimento di Scienze ed Arte*, costituito nel 1853 e posto, nel 1856, sotto la direzione del *Comitato del Consiglio per l'Educazione*. Furono proprio i *Lords* del *Committee* a deliberare, il 22 gennaio del 1875, la formazione di una *Loan Collection of Scientific Apparatus*. L'esposizione londinese, aperta a maggio del 1876 e che doveva essere allestita nelle sale del *South Kensington Museum* (da cui ha avuto origine l'attuale *Science Museum*), fu, a causa del gran numero di oggetti provenienti dal Regno Unito e dal

<sup>19</sup> Il nome dato al catalogo era: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. Esso era diviso in due parti; nella prima, i modelli erano ordinati per serie (nell'edizione del 1911 le serie erano 40 più una serie iniziale, o serie zero, non numerata, di modelli costruiti in cartone); nella seconda parte, i modelli erano omogeneamente raggruppati tenendo conto del loro legame scientifico.

<sup>20</sup> Irmond Bardin (1794-1867) fu allievo dell'*École Polytechnique* e poi anche "libero docente" di un corso di Geometria descrittiva e di scienze applicata all'industria (collaborò anche con Jean-Victor Poncelet) per la costruzione di modelli per lo studio della Geometria descrittiva.

<sup>21</sup> Théodore Olivier (1793-1853) fu anch'egli allievo dell'*École Polytechnique* e poi professore di Geometria descrittiva al *Conservatoire des Artes et Métiers*.

<sup>22</sup> Charles Muret era ingegnere della città di Parigi (vincitore della medaglia d'oro all'*Esposizione mondiale di Anversa* del 1885 per un modello plastico del *Canale interoceanico di Panama*).

continente europeo, allestita invece, in questa circostanza, nelle più vaste “galleries on the western side of the Horticultural Gardens” messe a disposizione dai commissari che avevano curato l’*Exhibition of the Works of Industry of all Nations* del 1851.

Un altro importante evento organizzato ancora nel Regno Unito fu l’esposizione di Edimburgo del 1914 (la *Napier Tercentenary Exhibition* avutasi in occasione del tricentenario della pubblicazione dell’opera di Nepero *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*), dove oltre a libri, strumenti e apparecchi per il calcolo numerico e grafico, furono esposti modelli di superfici matematiche.

La più importante esposizione internazionale riguardante modelli, apparecchi e strumenti della matematica e della fisica-matematica fu probabilmente quella che si svolse in Germania, a Monaco di Baviera, nel 1893, per il convegno dell’associazione dei matematici tedeschi, la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*. Per l’occasione fu edito a cura di Walther Dyck (1856-1934) un *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* da considerarsi come una sorta di *summa* teorico-documentale, di assoluto valore internazionale, in cui furono elencati e illustrati tutti i pezzi provenienti dai cataloghi specialistici (compreso l’importantissimo *Catalog* di Ludwig Brill) fino alle singole, interessanti realizzazioni eseguite da isolati autori.

L’Italia non ebbe un ruolo di primo piano nell’ideazione e costruzione di modelli. Ad esempio, l’allora giovane professore dell’Università di Padova, Giuseppe Veronese -1854-1917- (era stato per un anno -1880-‘81- a perfezionarsi in Germania) si fa promotore, nel Novembre del 1883, di una relazione al Ministro della Pubblica Istruzione, Guido Baccelli, a conclusione della quale viene chiesto che presso l’Università dove insegna si possa aprire un “atelier” per costruire modelli matematici, simile a quelli che funzionano in altri paesi europei, in modo da permettere alle istituzioni universitarie italiane di poter ottenere con minor spesa e senza dover ricorrere ad acquisti all’estero, la strumentazione utile per “fare matematica”<sup>23</sup>.

I finanziamenti non si trovarono e l’*atelier* non s’impiantò. Le università italiane continuarono ad acquistare il grosso delle loro collezioni all’estero. Tuttavia, in qualche sede si sviluppò una notevole produzione di modelli: è

---

<sup>23</sup> F. Palladino, *Il Fondo di modelli e strumenti matematici antichi dell’Università di Padova e l’iniziativa di Giuseppe Veronese per un Laboratorio nazionale italiano*, Padova, Università degli Studi, Dipartimento di Matematica pura ed applicata, 1999, pp. 109.

questo il caso, ad esempio, di Napoli, ad opera essenzialmente di Alfonso Del Re (1859-1921), ordinario di Geometria descrittiva<sup>24</sup>.

## 5.2 GENERAZIONE DI ANAGLIFI

Nonostante l'oblio a cui furono sottoposti i modelli di superfici durante gli ultimi, passati decenni e nonostante che essi sembrino non far più parte della nostra cultura matematica universitaria, oggi le antiche collezioni di modelli possono invece ancora suscitare notevole interesse, grazie alla loro idoneità ad illustrare proprietà caratterizzanti teorie, a fornire concretezza ad un risultato, come convalida e conforto all'intuizione e per la loro accessibilità all'esperimento.

Ricostruire una superficie al computer ed in più visualizzarla mediante *VR* o come *anaglifo* può essere una possibilità molto interessante per sfruttare a pieno le potenzialità della *VR* e dei software matematici nelle applicazioni didattiche.

Volendo oggi rappresentare delle superfici nello spazio tridimensionale con la stessa modalità utilizzata da Vuibert, s'è adoperato, per la riproduzione delle immagini tridimensionali, il *VRML*. Il *VRML* ("Virtual Reality Modeling Language") è un linguaggio ad alto livello che consente di rappresentare oggetti e di navigare in modo interattivo in spazi a tre dimensioni; ovvero di modellare ambienti per la realtà virtuale. Permette la realizzazione di ambienti virtuali in cui l'utente può interagire con gli oggetti presenti nella scena, definendo la dinamica e la modalità d'interazione, mentre le sue recenti estensioni consentono la modellazione di oggetti ed animazioni con altissimo livello di realismo, tramite l'introduzione delle curve *spline* al posto delle classiche poligonali.

---

<sup>24</sup> Si vuol mettere in evidenza che anche Alfonso Del Re conosce e menziona lo scritto di Vuibert *Les Anaglyphes géométriques* (vedi *Sulla visione stereoscopica e sulla stereo-fotogrammetria*, in *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche*, LIII, serie 3°, vol. XX). Ancora, sempre presso l'Università di Napoli, Federico Amodeo (1859-1946), nel suo articolo *Rappresentazione stereoscopica delle figure dello spazio nel piano* (apparso nella rivista *Le matematiche pure e applicate* –diretta da Cristofaro Alasia–, II, 1902 ma si cita dall'opuscolo stampato a parte, l' "estratto", che si è avuto modo di consultare), presenta tre tavole in cui sono raffigurate graficamente tre distinte figure solide con la tecnica della *Rappresentazione stereoscopica* (vale a dire "quella ottenuta mediante una *doppia proiezione centrale* fatta sul quadro –cioè sul piano, n.d.r.– da due centri di proiezione situati su una parallela al quadro"). Le tavole sono staccabili e pronte ad essere osservate mediante uno stereoscopio. In questo suo articolo Amodeo guarda alle fotografie stereoscopiche come a un valido sostituto delle "raccolte di modelli, che tanto splendidamente si eseguono in Darmstadt per le scuole e per gli individui che non hanno sufficienti mezzi per provvedersene".

Per diffondere l'uso del *VRML* e facilitare la costruzione di oggetti e scene in *3D*, sono stati costruiti numerosi ambienti di sviluppo, disponibili sia gratuitamente sia in versione commerciale; inoltre, i più diffusi programmi per la modellazione di oggetti *3D* consentono di salvare le scene direttamente in *VRML*, ossia in file *ASCII* con estensione *wrl*.

Viene ora descritta la procedura che è stata eseguita per la generazione di anaglifi di alcune famose superfici che erano già state riprodotte nel passato come modelli matematici. La prima superficie che intendiamo esaminare è la pseudosfera. Eugenio Beltrami (1835-1900)<sup>25</sup>, che aveva fornito un modello della geometria di Lobacevskij, provvide alla costruzione (nel 1869), utilizzando sostanzialmente la carta, di un modello a conformazione variabile che avrebbe dovuto rappresentare i tre tipi di superficie pseudosferica (iperbolica, ellittica, parabolica).

La superficie pseudosferica ha un'equazione non polinomiale ed è un esempio di superficie a curvatura gaussiana costante negativa. Storicamente, essa è particolarmente interessante perché fornisce un modello di spazio in cui la geometria non è più quella euclidea. Ideata da Beltrami, come si è detto, diede nuovo impulso alla geometria "immaginaria" elaborata da Lobacevskij poiché ne rappresenta un modello "locale": è stato il primo modello, per quanto molto discusso<sup>26</sup>, proposto per le geometrie non euclidee. La curva meridiana, da cui la pseudosfera è generata mediante rotazione intorno all'asintoto della curva medesima, è la *trattrice*, definita come il luogo dei punti del piano tali che i segmenti di tangente compresi tra essa e una retta (l'asintoto) hanno lunghezza costante:

---

<sup>25</sup> Dalla corrispondenza scientifica di Eugenio Beltrami, emerge anche che egli insiste sulla duplice valenza dei modelli di superfici matematiche, sia come strumento di verifica per risultati già raggiunti, sia come strumento di ricerca. Per i dettagli, si può consultare Livia Giacardi, *La collezione e la sua storia*, in "La collezione dei modelli geometrici della Biblioteca di Matematica Giuseppe Peano", a cura di Giorgio Ferrarese, reperibile al sito <http://www.dm.unito.it/modelli>; si veda inoltre A.C. Capélo, M. Ferrari, *La «cuffia» di Beltrami: storia e descrizione*, «Bollettino di Storia delle Scienze matematiche», II, 1982, pp. 233-247.

<sup>26</sup> Si possono consultare alcune lettere di Angelo Genocchi a Enrico Betti presentate in N. Palladino, A.M. Mercurio, F. Palladino, *Per la costruzione dell'Unità d'Italia. Le corrispondenze epistolari Brioschi-Cremona e Betti-Genocchi*, Firenze, Olschki, 2009, p. XVII, e L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli, *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère*, Paris, A. Blanchard, 1998.



Fig. 10. Curva trattrice

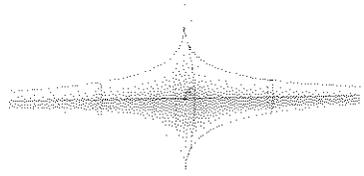


Fig. 11. Pseudosfera generata dalla rotazione della trattrice intorno al suo asintoto

L'equazione parametrica della superficie è:

$$\begin{cases} x(u, v) = \cos(u) * \sin(v) \\ y(u, v) = \sin(u) * \sin(v) \\ z(u, v) = \cos(v) + \log(\tan(v/2)) \end{cases}$$

con  $0 \leq u \leq 2\pi$  e  $0 < v < \pi$ .

Altre importanti superfici di cui furono costruiti modelli e delle quali intendiamo generare l'anaglifo sono la famosa *Superficie romana di Steiner* (*Die römische Fläche von Steiner*) e l'altrettanto celebre *Superficie diagonale* (*Diagonalfäche*) di Clebsch.

La *Superficie romana di Steiner* è così detta perché fu ideata da Jacob Steiner (1796-1863) durante un suo soggiorno a Roma<sup>27</sup>; essa è una superficie razionale del quarto ordine e di terza classe, a simmetria tetraedale, di equazione cartesiana  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0$ . La *Superficie diagonale* va considerata come la superficie principale tra quelle regolari (ovvero lisce, vale a dire senza punti singolari) del terzo ordine: esse contengono 27 rette ma solo per la *Diagonalfäche* tutte quante queste rette sono distinte e reali.

---

<sup>27</sup> La nascita della *Superficie romana* ha notevolmente incuriosito i matematici. tra le varie testimonianze in proposito, si può citare quanto segue: Francesco Gerbaldi, nella Prefazione al suo articolo *La Superficie di Steiner studiata sulla sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche*, scrive: "La superficie di 4° ordine e 3° classe non sviluppabile, che ha nome dal sommo Steiner, è stata da lui scoperta circa il 1838 (secondo Weierstrass), quando trovavasi a Roma col Jacobi; per questo fu anche detta la *superficie Romana*" (si cita da un opuscolo a parte, ovvero un "estratto", stampato a Torino, Stamperia reale di I. Vigliardi, nel 1881). Nella corrispondente nota a pie' di pagina, Gerbaldi aggiunge: "Questa notizia storica mi fu comunicata dall'egregio Prof. Beltrami".

S'è scelto, ancora, di ricostruire, tra gli antichi modelli contenuti negli importanti cataloghi tedeschi su menzionati, tra i tre modelli di superfici di Riemann (*Modelle einiger Riemann'schen Flächen*), la *Superficie di Riemann a 2 fogli, dotata di 1 punto di diramazione del primo ordine e semplicemente connessa* (*Zweiblättrige einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche, welche in ihrem Innern einen Windungspunkt erster Ordnung enthält*).

A partire dalle equazioni a disposizione, il primo passo per la realizzazione di anaglifi è stato riprodurre le superfici mediante *Mathematica*<sup>®</sup>, un programma di software matematico che consente di generare superfici sotto forma di oggetti grafici che possono essere rielaborati graficamente con software per la modellazione 3D.

Per trasformare poi le superfici così ricostruite in oggetti grafici tridimensionali manipolabili nella realtà virtuale, è stato utilizzato il package *MathGL*<sup>®</sup>, che permette di esportare gli oggetti di *Mathematica* in oggetti *VRML*.

*MathGL* è un package di funzioni grafiche che si connette a *Mathematica* e consente di visualizzare oggetti con un'elevatissima qualità grafica. Tramite la tecnica di *texturing*, che consiste nel proiettare su una superficie una rappresentazione bidimensionale di un materiale, *MathGL* conferisce ad un oggetto in 3D un aspetto realistico.

Seguendo allora quanto raccomandato da Vuibert per le esigenze della didattica, dopo aver ottenuto la superficie tridimensionale, s'è creato l'anaglifo di ognuna delle superfici realizzate, modificando ancora il codice *VRML* e creando delle nuove superfici nella maniera che segue:

---

```

Shape {
  appearance Appearance { material Material {emissiveColor 0 1 1}
}
  geometry IndexedLineSet
  {
    coord Coordinate
      {
        point [ ... ]
      }
    coordIndex [ ... ]
  }
}

```

---

```

Shape {
  appearance Appearance { material Material {emissiveColor 1 0 0}
}
  geometry IndexedLineSet

```

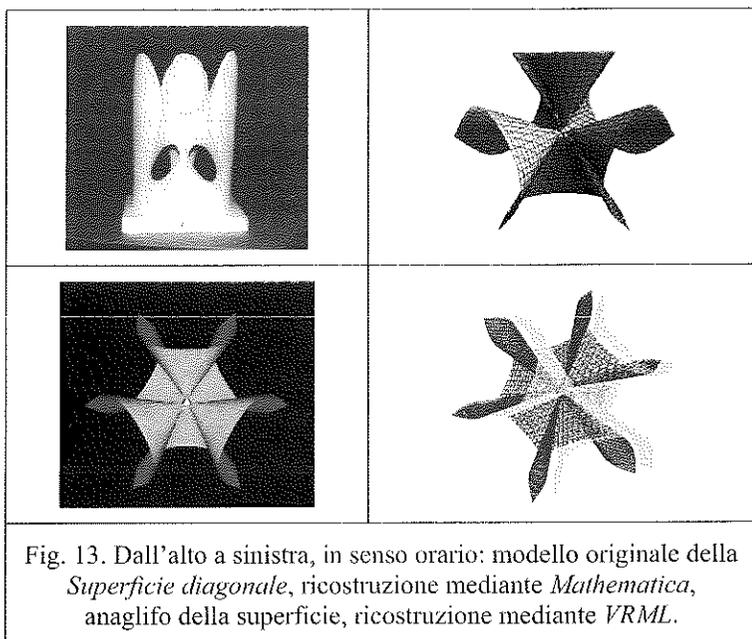
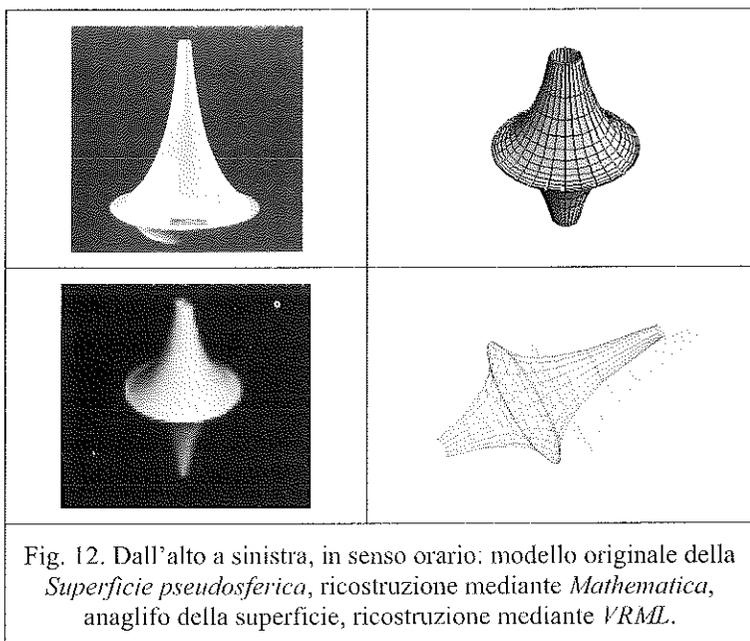
---

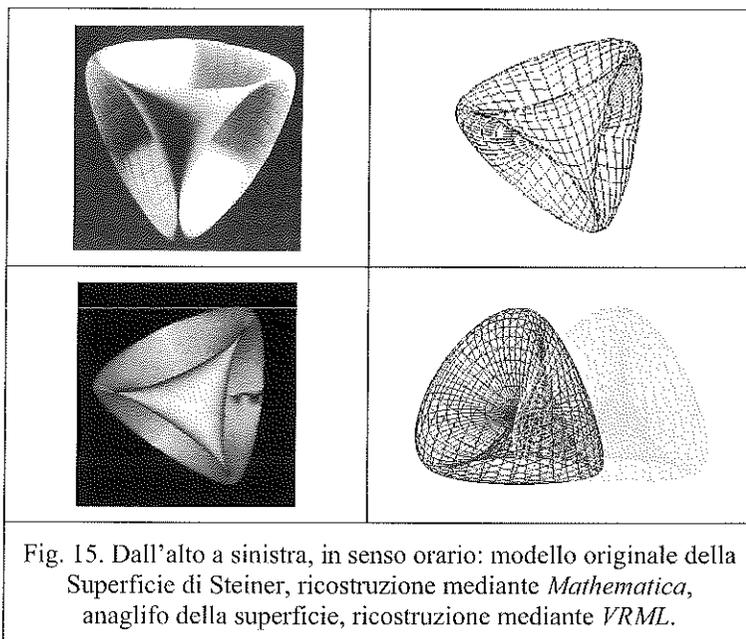
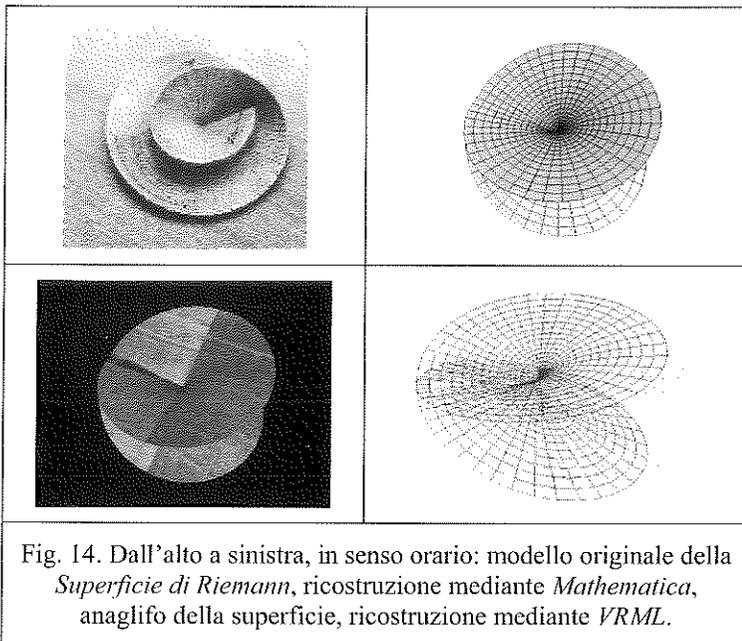
---

```
{  
    coord Coordinate  
        {  
            point [ ... ]  
        }  
    coordIndex [ ... ]  
}
```

---

Utilizzando tale tecnica, il risultato è un anaglifo di una superficie tridimensionale (dai colori rosso e ciano), manipolabile nello spazio *3D* tramite *plug-in VRML*. Nelle figure seguenti, sono riportate seppur in bianco e nero, alcuni esempi di immagini delle superfici riprodotte.





**On the dynamic of the nonlinear reaction diffusion equation**

$u_t = \Delta F(u) + f(\mathbf{x}, u, \nabla u)$  under Robin boundary data

Nota di S. Rionero <sup>1</sup> e M. Vitiello <sup>2\*</sup>

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero  
(Adunanza del 6 Novembre 2009)

**Abstract** - Let  $\Omega$  be a bounded smooth domain in  $R^3$ . Under Robin boundary data, the nonlinear reaction diffusion equation

$$u_t = \Delta F(u) + f(\mathbf{x}, u, \nabla u) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+,$$

is studied. Existence, uniqueness, stability and longtime behaviour of solutions are analyzed. An application to the dynamic of a population inhabiting a strongly heterogeneous environment is considered.

**Riassunto** - Posto  $\Omega$  un dominio limitato di  $R^3$ , viene studiata l'equazione non lineare di reazione e diffusione

$$u_t = \Delta F(u) + f(\mathbf{x}, u, \nabla u) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+$$

con condizioni al bordo di tipo Robin. Vengono analizzate l'esistenza, l'unicità, la stabilità e l'andamento nel tempo delle soluzioni di tale equazione. I risultati ottenuti sono applicati alla dinamica di una popolazione abitante un ambiente fortemente eterogeneo.

## 1 Introduction

As it is well known the equation

$$u_t = \Delta F(u) + f(\mathbf{x}, u, \nabla u) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+, \tag{1}$$

governs a great variety of phenomena, ranging from physics to biology [1]-[6]. In the past few years, a great deal of work has been done to study the behaviour of the solutions of (1) as  $t \rightarrow \infty$  or approaches the finite blow up time.

Recently, under Dirichlet and Robin boundary data, several results of stability have been obtained in [5]-[10]. Precisely in the case of Dirichlet (both in the case of  $\Omega$  bounded or unbounded) the longtime behaviour of the solutions has been studied. The Robin boundary data have been considered in [10] and the existence and stability of the steady states of have been investigated.

In the present paper we reconsider the problem with the aim of obtaining conditions on  $F$  and  $f$  guaranteeing either that each solution tends towards a steady state when  $t \rightarrow \infty$  or is definitively

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Napoli, rionero@unina.it.

<sup>2</sup>Dipartimento di Matematica, Politecnico di Bari, II Facoltà di Ingegneria, Taranto, vitiello@dm.uniba.it.

bounded or blows up in finite time.

The plain of the paper is as follows. After some preliminaries (Section 2), four different topics are addressed. Section 3 is devoted to the existence and uniqueness of solutions. Successively (Section 4) we prove the existence of the global attractor. In Section 5 - via Lyapunov Direct Method - we furnish conditions guaranteeing that any solutions converge toward a steady state. Next (Section 6) conditions guaranteeing the blow up in finite time are obtained. In Section 7 we study a diffusive logistic model, introduced in [11]-[12], where the population may be subjected to drift in addition to diffusion. The paper ends with an Appendix in which we furnish a remark on the role of a weaker assumption on  $F$  useful throughout the paper.

## 2 The model and basic assumptions

Let  $\Omega$  be an open bounded set in  $R^3$  with  $C^{2+p}$  ( $p > 0$ ) boundary  $\partial\Omega$ , having the interior cone property. We consider the initial boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta F(u) + f(\mathbf{x}, u, \nabla u) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \beta u(\mathbf{x}, t) + (1 - \beta) \frac{du}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times R^+, \end{cases} \quad (2)$$

where  $\mathbf{n}$  denotes the outward unit normal vector to  $\partial\Omega$ ,  $\beta$  is a constant  $\in ]0, 1[$ ,  $F \in C^2(\Omega \times R)$ ,  $f \in C(\Omega \times R \times R^n)$  and  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ .

The equilibria of (2) are governed by

$$\begin{cases} \Delta F(U) + f(\mathbf{x}, U, \nabla U) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \beta U + (1 - \beta) \frac{dU}{d\mathbf{n}} = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Let (3) be solvable and let  $U$  denote a solution. On setting

$$\begin{cases} u = U + v, \\ L(U, v) = F(U + v) - F(U), \\ g(\mathbf{x}, U, v, \nabla U, \nabla v) = f(\mathbf{x}, U + v, \nabla U + \nabla v) - f(\mathbf{x}, U, \nabla U), \end{cases} \quad (4)$$

in view of (2) and (3), it follows that

$$\begin{cases} v_t = \Delta L(U, v) + g(\mathbf{x}, U, v, \nabla U, \nabla v) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+, \\ v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \beta v(\mathbf{x}, t) + (1 - \beta) \frac{dv}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times R^+. \end{cases} \quad (5)$$

We assume that:

- (i) exist two positive constants  $m$  and  $m_1$  such that

$$2m \leq F'(U) \leq m_1 \quad \text{a.e. in } \Omega. \quad (6)$$

(ii) denoting by  $\|\cdot\|$  the  $L^2(\Omega)$ -norm, it turns out that [6]-[7]

$$\|g^{n+1}\| \leq \mu \|v^{n+1}\|^{k+\frac{1}{2}} \quad n \in N \quad (7)$$

with  $\mu$  and  $k$  positive constants.

(iii)

$$u = 0 \Rightarrow f = 0. \quad (8)$$

In view of (6), following the procedures used in [8]-[9], one obtains that there exists a positive constant  $\epsilon$  such that {cfr. Appendix}

$$|v| < \epsilon \Rightarrow m \leq F'(u) \leq m^* \quad a.e. \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad t \geq 0 \quad (9)$$

with  $m^* = m + m_1$ .

Further, from (7) and (8), it follows that

$$\|f(\mathbf{x}, u, \nabla u)\| \leq \mu \|u\|^{k+\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

We denote by  $W^{1,2}(\Omega, \partial\Omega, \beta)$  the functional space such that

$$\Psi \in W^{1,2}(\Omega, \partial\Omega, \beta) \Rightarrow \left\{ \Psi \in W^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,2}(\partial\Omega); \beta\Psi + (1-\beta)\frac{d\Psi}{d\mathbf{n}} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times R^+ \right\},$$

and recall that in  $W^{1,2}(\Omega, \partial\Omega, \beta)$  holds the inequality [13]-[14]

$$\|\nabla\Psi\|^2 + \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} \Psi^2 d\Sigma \geq \bar{\lambda} \|\Psi\|^2, \quad (11)$$

with  $\bar{\lambda}$  the lowest eigenvalue of

$$\Delta\Psi + \lambda\Psi = 0 \quad (12)$$

in  $W^{1,2}(\Omega, \partial\Omega, \beta)$ .

### 3 Existence and uniqueness

The aim of this section is to establish some existence and uniqueness results for (2).

**Theorem 1** Let  $f : \Omega \times R \times R^3 \rightarrow R$  be a Caratheodory function (i.e.  $f(\cdot, U, \nabla U)$  is measurable in  $\Omega$  for any  $(U, \nabla U)$  in  $R \times R^3$  for almost every  $\mathbf{x} \in \Omega$ ) such that (6) and (10) hold and let

$$\mu \leq \frac{4}{2k+3} \bar{\lambda} m \quad (13)$$

with  $0 < k \leq \frac{1}{2}$  holds together with  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Then there exists a weak solution  $u$  of (2) such that  $u \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$  and (2)<sub>1</sub> holds in  $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ .

**Proof.** First of all we consider the orthonormal basis  $\{w_k : k \in N\}$  of  $L^2(\Omega)$ , where  $w_k \in H^1(\Omega)$  is an eigenfunction of the spectral problem (12), i.e.

$$\begin{cases} -\Delta w_k = \lambda_k w_k & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \beta w_k + (1-\beta)\frac{dw_k}{d\mathbf{n}} = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (14)$$

We also normalize  $w_k$  such that  $\|w_k\| = 1$ .

Now, in order to get the proof, we employ the Faedo-Galerkin method: for each integer  $n$  we will look for an approximate solution  $u_n$  of (2) of the form

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n g_{kn}(t)w_k(\mathbf{x}) \tag{15}$$

satisfying

$$\begin{cases} (u'_n, w_k) = (\Delta F(u_n), w_k) + (f(\mathbf{x}, u_n, \nabla u_n), w_k), & k = 1, 2, \dots, n \\ (u_n(0), w_k) = \alpha_{kn}, \end{cases} \tag{16}$$

where  $\alpha_{kn}$  are suitable constants such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{kn} w_k = u_0.$$

Then (16) is reduced to the following initial value problem for the system of nonlinear ordinary differential equations (with respect to  $g_{kn}$ ) given by

$$\begin{cases} \frac{dg_{kn}}{dt} = G_k(g) + f_k(g), & k = 1, 2, \dots, n \\ g_{kn}(0) = \alpha_{kn}, \end{cases} \tag{17}$$

where

$$G_k(g) = \int_{\Omega} \Delta F\left(\sum_{k=1}^n g_{kn} w_k\right) w_k d\Omega,$$

and

$$f_k(g) = \int_{\Omega} f\left(\mathbf{x}, \sum_{k=1}^n g_{kn} w_k, \sum_{k=1}^n g_{kn} \nabla w_k\right) w_k d\Omega.$$

According to the standard existence theory for ordinary differential equations, there exists a local solution in the interval  $(0, T_n)$  of (17).

In order to extend the local solution to the interval  $(0, T)$  independent of  $n$  the following estimates are needed.

*Estimate 1:* We multiply the equation (16)<sub>1</sub> by  $g_{kn}(t)$ , adding these relation by  $k = 1, 2, \dots, n$ , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 &= \int_{\partial\Omega} \nabla F(u_n) \cdot \mathbf{n} u_n d\Sigma - \int_{\Omega} \frac{dF(u_n)}{du_n} (\nabla u_n)^2 d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, u_n, \nabla u_n) u_n d\Omega. \end{aligned}$$

From the boundary condition (2)<sub>3</sub>, (6) and (10) it turns out that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 \leq -\frac{\beta m}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u_n^2 d\Sigma - m \|\nabla u_n\|^2 + \mu \|u_n\|^{k+\frac{3}{2}}.$$

By virtue of the Young inequality and (11) it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2 + \left[ m - \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right] \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u_n^2 d\Sigma + \|\nabla u_n\|^2 \right] \leq C$$

with  $C = \frac{\mu(1-2k)}{4}|\Omega|$ . Integrating with respect to  $t$  one obtains

$$\|u_n\|^2 + 2 \left[ m - \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right] \int_0^t \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u_n^2 d\Sigma + \|\nabla u_n\|^2 \right] dt \leq C_T \tag{18}$$

where  $C_T$  is a positive constant depending only on  $\|u_0\|$  and  $T$ . Thus, (18) and (13) yield

$$\|u_n\|^2 \leq C_T \quad \forall t \in [0, T] \tag{19}$$

i.e.

$$(u_n) \text{ is bounded in } L^2([0, T], L^2(\Omega)).$$

*Estimate 2:* Multiplying the equation (16)<sub>1</sub> by  $F'(u_n)g'_{kn}$ , then summing with respect to  $k$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F'(x, u_n)(u'_n)^2 d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \nabla F(x, u_n) \cdot \mathbf{n} F'(x, u_n) u'_n d\Sigma + \\ &- \int_{\Omega} \nabla F(x, u_n) \nabla (F'(x, u_n) u'_n) d\Omega + \int_{\Omega} f(x, u_n, \nabla u_n) F'(x, u_n) u'_n d\Omega. \end{aligned}$$

Taking into account the boundary conditions and using (6), it follows that

$$\begin{aligned} m\|u'_n\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} F^2(x, u_n) d\Sigma + \|\nabla F(u_n)\|^2 \right] &\leq \\ &\leq m^* \int_{\Omega} f(x, u_n, \nabla u_n) u'_n d\Omega. \end{aligned}$$

The Cauchy-Schwarz inequality implies

$$m\|u'_n\|^2 + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} F^2(u_n) d\Sigma + \|\nabla F(u_n)\|^2 \right] \leq \frac{(m^*)^2}{m} \|f(x, u_n, \nabla u_n)\|^2.$$

From (10) it turns out that

$$m\|u'_n\|^2 + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} F^2(u_n) d\Sigma + \|\nabla F(u_n)\|^2 \right] \leq \frac{\mu^2 (m^*)^2}{m} \|u_n\|^{2k+1}.$$

Integrating with respect to  $t$  yields the following further estimate

$$(u'_n) \text{ is bounded in } L^2([0, T], L^2(\Omega)). \tag{20}$$

*Limit of the approximate solutions:* From the estimate (19) and (20) we can take the limit of the nonlinear system (16). In fact, there exists a subsequence of  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  which we denote as the original sequence, such that  $u'_n \rightarrow u'$  and  $u_n \rightarrow u$  both in  $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ .

For any fixed  $k$ , letting  $n \rightarrow \infty$  in (16), we obtain that the following holds in  $L^2([0, T], L^2(\Omega))$

$$(u', w_k) = (\Delta F(u), w_k) + (f(x, u, \nabla u), w_k).$$

**Theorem 2** *Let  $u$  and  $v$  be solutions of (2). Then, under the assumptions of Theorem 1 with  $k = \frac{1}{2}$ ,  $u = v$  a.e. in  $\Omega$ .*

**Proof.** Let  $u(\mathbf{x}, t)$  and  $v(\mathbf{x}, t)$  two solutions satisfying (2) and let  $w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - v(\mathbf{x}, t)$ , in view of (4), we have

$$\begin{cases} w_t = \Delta L(v, w) + g(\mathbf{x}, v, w, \nabla v, \nabla w) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times R^+, \\ w(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) - v_0(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \beta w + (1 - \beta) \frac{dw}{dn} = 0 & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times R^+. \end{cases} \tag{21}$$

Multiplying the equation (21)<sub>1</sub> by  $w(t)$  and integrating over  $\Omega$ , we find

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 = \int_{\partial\Omega} \nabla L \cdot \mathbf{n} w d\Sigma - \int_{\Omega} \nabla L \nabla w d\Omega + \int_{\Omega} g w d\Omega.$$

Then using (21)<sub>3</sub>, (13) and (10) we see that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq -\frac{\beta m}{(1 - \beta)} \int_{\partial\Omega} w^2 d\Sigma - m \int_{\Omega} (\nabla w)^2 d\Omega + \mu \|w\|^2.$$

In view of the inequality (11) it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq (\mu - \bar{\lambda} m) \|w\|^2.$$

Finally, from (13) we obtain that

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq 0$$

i.e.

$$\|w(\mathbf{x}, t)\|^2 \leq \|w(\mathbf{x}, 0)\|^2. \tag{22}$$

But note that  $w(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) - v_0(\mathbf{x}) = 0$ , then (22) implies the uniqueness (i.e.  $w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - v(\mathbf{x}, t) = 0$ ).

**Remark 3.1** *Let us recall that in [10] we proved an existence theorem for the elliptic problem (3). In particular, under the assumptions of theorem 1, it has been shown that there exists a solution  $U \in L^2(\Omega)$  to problem (3).*

### 4 Global attractor

**Theorem 3** *Let (6), (10) and (13) with  $k < \frac{1}{2}$  hold together with  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Then (2) has a global attractor.*

**Proof.** In order to show that (2) has a compact connected attractor, the first step is to obtain that exists an absorbing set in  $L^2(\Omega)$  and then an absorbing set in  $H^1(\Omega)$ .

*Absorbing set in  $L^2(\Omega)$ .*

Multiplying (2)<sub>1</sub> by  $u$  and integrating over  $\Omega$  one obtains

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= \int_{\Omega} \Delta F(u) u d\Omega + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, u, \nabla u) u d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} u \nabla F(u) \cdot \mathbf{n} d\Sigma - \int_{\Omega} \nabla F(u) \nabla u d\Omega + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, u, \nabla u) u d\Omega = \end{aligned} \tag{23}$$

$$= \int_{\partial\Omega} F'(u)u\nabla u \cdot n d\Sigma - \int_{\Omega} F'(u)(\nabla u)^2 d\Omega + \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)u d\Omega.$$

By virtue of the boundary conditions (2)<sub>3</sub>, it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq -\frac{m\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u^2 d\Sigma - m \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)u d\Omega. \quad (24)$$

The Holder inequality and (11) give

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq -m\bar{\lambda} \|u\|^2 + \mu \|u\|^{k+\frac{3}{2}}.$$

The Young inequality implies

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \left[ m\bar{\lambda} - \mu \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right] \|u\|^2 \leq \frac{\mu}{4} (1-2k) |\Omega|. \quad (25)$$

Setting

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 d\Omega, \quad C_1 = \left[ m\bar{\lambda} - \mu \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right], \quad C_2 = \frac{\mu}{4} (1-2k) |\Omega|, \quad (26)$$

(25) implies

$$\frac{d}{dt} E(t) + 2C_1 E(t) \leq C_2$$

with  $C_1, C_2$  two positive constants independent of the initial data  $u_0$  and hence immediately one obtains

$$E(t) \leq E(0)e^{-2C_1 t} + \frac{C_2}{2C_1} (1 - e^{-2C_1 t}). \quad (27)$$

Thus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup E(t) \leq \rho_0^2 \quad (28)$$

with  $\rho_0^2 = \frac{C_2}{2C_1}$ .

There exists an absorbing set  $B_0$  in  $L^2(\Omega)$ , namely, any ball of  $L^2(\Omega)$  centered at O of radius  $\rho'_0 > \rho_0$ . If  $B$  is a bounded set of  $L^2(\Omega)$ , included in a ball  $B(O, R)$  of  $L^2(\Omega)$ , centered at O of radius  $R$ , then

$$u(t) \in B(O, \rho'_0) \quad \forall t \geq t_0(B, \rho'_0)$$

with

$$t_0 = \frac{1}{2C_1} \log \frac{R^2}{(\rho'_0)^2 - \rho_0^2}.$$

We also note that the balls  $B(0, \rho'_0)$ , for  $\rho'_0 > \rho_0$  and even  $\rho'_0 = \rho_0$  are positively invariant. In fact, from (27), if  $E(0) < \rho_0^2$  we infer that

$$\begin{aligned} E(t) &< \rho_0^2 e^{-2C_1 t} + \rho_0^2 (1 - e^{-2C_1 t}) = \\ &= (\rho_0^2 - \rho_0^2) e^{-2C_1 t} + \rho_0^2 \leq \rho_0^2. \end{aligned}$$

Now we observe that from (24) and (11) it turns out that

$$\frac{dE(t)}{dt} + \left[ m - \frac{\mu}{\bar{\lambda}} \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right] \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u^2 d\Sigma + \|\nabla u\|^2 \right] \leq C_2.$$

Integrating from  $t$  and  $t + \delta$ , it follows that

$$\left[ m - \frac{\mu}{\bar{\lambda}} \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right] \int_t^{t+\delta} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u^2 d\Sigma + \|\nabla u\|^2 \right] d\tau \leq C_2 \delta + E(t).$$

Thanks to (28) we obtain

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left\{ \left[ m - \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right] \int_t^{t+\delta} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u^2 d\Sigma + \|\nabla u\|^2 \right] d\tau \right\} \leq C_2 \delta + \rho_0^2. \quad (29)$$

If  $u_0 \in B \subset B(O, R)$  and  $t \geq t_0$ , (29) becomes

$$\left[ m - \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{2k+3}{4} \right) \right] \int_t^{t+\delta} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u^2 d\Sigma + \|\nabla u\|^2 \right] d\tau \leq C_2 \delta + (\rho_0')^2.$$

*Absorbing set in  $H^1(\Omega)$*

We now prove the existence of an absorbing set in  $H^1(\Omega)$  and the uniform compactness. For this purpose we multiply (2)<sub>1</sub> by  $-F'(u)\Delta F(u)$ . Integrating over  $\Omega$  and using the divergence theorem we obtain

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial\Omega} \nabla F \cdot \mathbf{n} F_t d\Sigma + \int_{\Omega} \nabla F \nabla F_t d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega} F'(u) (\Delta F(u))^2 d\Omega - \int_{\Omega} F'(u) f(\mathbf{x}, u, \nabla u) \Delta F(u) d\Omega. \end{aligned}$$

By (2)<sub>3</sub> and (6) one obtains

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} F F_t d\Sigma + \int_{\Omega} \nabla F \nabla F_t d\Omega \leq \\ & \leq -m \|\Delta F(u)\|^2 - \int_{\Omega} \frac{\partial F(u)}{\partial u} f(\mathbf{x}, u, \nabla u) \Delta F(u) d\Omega \end{aligned}$$

The Cauchy-Schwarz inequality and (6) imply

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} F^2 d\Sigma + \int_{\Omega} (\nabla F)^2 d\Omega \right] \leq \frac{(m^*)^2}{4m} \|f(\mathbf{x}, u, \nabla u)\|^2. \quad (30)$$

Let us introduce the following Lyapunov function

$$W(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u^2 d\Sigma + \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega \right]. \quad (31)$$

From (30) and (10) one obtains

$$m^2 \dot{W}(t) \leq \frac{\mu^2 (m^*)^2}{4m} \|u\|^{2k+1}.$$

The Young inequality implies

$$m^2 \dot{W}(t) \leq \frac{\mu^2 (m^*)^2}{4m} \left( \frac{2k+1}{2} \right) \|u\|^2 + \frac{\mu^2 (m^*)^2 |\Omega|}{4m} \left( \frac{1-2k}{2} \right)$$

Applying the inequality (11) it turns out that

$$\dot{W}(t) \leq \frac{\mu^2 (m^*)^2}{2m^3 \lambda} \left( \frac{2k+1}{2} \right) W(t) + \frac{\mu^2 (m^*)^2 |\Omega|}{4m^3} \left( \frac{1-2k}{2} \right).$$

The application of the Uniform Gronwall Lemma, for an arbitrary fixed  $\delta > 0$  gives

$$\forall \delta > 0 \quad W(t+\delta) \leq \left[ \frac{k}{\delta} + \frac{\mu^2 (m^*)^2 |\Omega|}{4m^3} \left( \frac{1-2k}{2} \right) \right] \exp \left[ \frac{\mu^2 (m^*)^2}{2m^3 \lambda} \left( \frac{2k+1}{2} \right) \right] \quad (32)$$

provided

$$\int_t^{t+\delta} W(\tau) d\tau \leq k \quad \forall t \geq t^* \tag{33}$$

Hence (32) provides a uniform bound for  $\|\nabla u(t + \delta)\|$  for  $0 \leq t \leq \delta$ . For our purpose it is simpler and sufficient to set  $t^* = t_0$ ; in this case, the value of  $k$  is given by

$$k = \frac{4\bar{\lambda}}{4\lambda m - \mu(2k + 3)} (\delta C_2 + \rho_0^2). \tag{34}$$

It follows that the ball of  $H^1(\Omega)$  centered at  $O$  of radius  $\rho_1$  is absorbing in  $H^1(\Omega)$ , where  $\rho_1^2 = \left[ \frac{k}{\delta} + \frac{\mu^2(m^*)^2|\Omega|}{4m^3} \left( \frac{1 - 2k}{2} \right) \right] \exp \left[ \frac{\mu^2(m^*)^2}{2m^3\lambda} \left( \frac{2k + 1}{2} \right) \right]$  and, if  $u_0$  belongs to the ball  $B(O, R)$  of  $L^2(\Omega)$  centered at  $O$  of radius  $R$ , then  $u(t)$  enters this absorbing set denoted  $B_1$  at time  $t \leq t_0 + \delta$ , and remains in it for  $t \geq t_0 + \delta$ .

At the same time, this result provides that any bounded set  $B$  of  $L^2(\Omega)$  is included in such a ball  $B(O, R)$ , and for  $u_0 \in B$  and  $t \geq t_0 + \delta$ ,  $t_0, \delta$ , as above,  $u(t)$  belongs to  $B_1$  which is bounded in  $H^1(\Omega)$  and relatively compact in  $L^2(\Omega)$ .

### 5 Stability Criteria

Setting

$$V(t) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} |\nabla L|^2 - C(U, v, \nabla U, \nabla v) \right] d\Omega + \frac{\beta}{2(1 - \beta)} \int_{\partial\Omega} L^2 d\Sigma \tag{35}$$

with

$$G(U, v, \nabla U, \nabla v) = \int_0^r \frac{dL}{dv} g(U, r, \nabla U, \nabla r) dr \tag{36}$$

the following theorem holds true.

**Theorem 4** *Let (6) and (7) hold with  $k = \frac{1}{2}$  and let*

$$\mu < \frac{\bar{\lambda} m^2}{2m^*} \tag{37}$$

*holds. Then  $U$  is stable according to*

$$V(t) \leq V(0). \tag{38}$$

*Further  $U$  is also stable with respect to the  $L^2$ -norm, in the class of perturbations belonging to  $W^{1,2}(\Omega, \partial\Omega, \beta)$  according to*

$$\int_{\Omega} v^2 d\Omega \leq \frac{2}{(\bar{\lambda} m^2 - 2m^* \mu)} V(0). \tag{39}$$

**Proof.** In view of (11) and (6), it turns out that

$$V(t) \geq \frac{1}{2} \bar{\lambda} m^2 \int_{\Omega} v^2 d\Omega - m^* \int_{\Omega} \int_0^v g dv d\Omega$$

and the main value theorem implies

$$V(t) \geq \frac{1}{2} \bar{\lambda} m^2 \int_{\Omega} v^2 d\Omega - m^* \int_{\Omega} v g(x, \theta v, \theta \nabla v) d\Omega \tag{40}$$

with  $0 < \theta(t) < 1, \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Then by virtue of the Holder inequality one obtains

$$V(t) \geq \frac{1}{2} \bar{\lambda} m^2 \|v\|^2 - m^* \|v\| \|g(\mathbf{x}, \theta v, \theta \nabla v)\|,$$

therefore (7) implies

$$V(t) \geq \frac{1}{2} \bar{\lambda} m^2 \|v\|^2 - m^* \mu \|\theta v\|^2 \geq \left( \frac{1}{2} \bar{\lambda} m^2 - m^* \mu \right) \|v\|^2 \tag{41}$$

with  $\mu$  positive constant.

Then, for  $0 < \mu < \frac{\bar{\lambda} m^2}{2m^*}$  it turns out that  $V$  is positive definite.

Along the solutions of (5) one has

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_{\Omega} \left[ \nabla L \nabla L_t - \frac{dL}{dv} g(U, v) v_t \right] d\Omega + \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} L L_t d\Sigma = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \Delta L L_t + \frac{dL}{dv} g(U, v) v_t \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\beta}{1-\beta} L L_t + L_t \nabla L \cdot \mathbf{n} \right) d\Sigma = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \Delta L L_t + \frac{dL}{dv} g(U, v) v_t \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\beta}{1-\beta} L + \nabla L \cdot \mathbf{n} \right) L_t d\Sigma. \end{aligned}$$

Therefore, taking into account the boundary condition (5)<sub>3</sub>, it follows that

$$\dot{V}(t) = - \int_{\Omega} \Delta L \frac{dL}{dv} v_t + g(U, v) \frac{dL}{dv} v_t d\Omega = - \int_{\Omega} [\Delta L + g] v_t \frac{dL}{dv} d\Omega.$$

Finally from (5)<sub>1</sub> and (6) it turns out that

$$\dot{V} \leq -m \int_{\Omega} v_t^2 d\Omega \leq 0 \tag{42}$$

and hence

$$V(t) \leq V(0) \quad \forall t \geq 0$$

i.e. the stability in the measure of  $V$ .

On the other hand, (41) gives

$$\int_{\Omega} v^2 d\Omega \leq \frac{2}{(\bar{\lambda} m^2 - 2m^* \mu)} V(0)$$

i.e. the stability in the  $L^2(\Omega)$ -norm.

## 6 Blow Up

**Theorem 5** *Let  $u$  be a solution of (2). Suppose that (7),*

$$F'(u) \leq -m^* \tag{43}$$

and

$$\mu > \frac{4}{3} m^* \bar{\lambda}, \quad k > \frac{1}{2} \tag{44}$$

hold. Then  $u$  blows up in a finite time.

**Proof.** Multiplying the equation (2)<sub>1</sub> by  $u$ , then integrating over  $\Omega$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 &= - \int_{\Omega} F'(u) (\nabla u)^2 d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega} F'(u) u \nabla u \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, u, \nabla u) u d\Omega. \end{aligned}$$

In view of (2)<sub>3</sub>, it follows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq m^* \left[ \|\nabla u\|^2 + \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\partial\Omega} u^2 d\Sigma \right] + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, u \nabla u) u d\Omega$$

which, by virtue of the inequality (11), the Young inequality and (10) implies

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \geq (m^* \bar{\lambda} - \frac{3}{4} \mu) \|u\|^2 - \frac{\mu}{4} \|u\|^{4k}.$$

In view of (26), it follows that

$$\dot{E}(t) \geq 2(m^* \bar{\lambda} - \frac{3}{4} \mu) E(t) - \mu 2^{2k-2} E^{2k}(t). \quad (45)$$

Setting  $Z = \frac{1}{E^{2k-1}}$ , it follows that

$$\frac{dZ}{dt} - \eta Z(t) \leq \eta_1$$

with

$$\eta = (2k-1) \left( \frac{3}{2} \mu - 2m^* \bar{\lambda} \right) \quad \eta_1 = (2k-1) \mu 2^{2k-2}.$$

Then, integrating one obtains

$$E^{2k-1}(t) \geq \frac{\eta E^{2k-1}(0)}{e^{\eta t} (\eta + \eta_1 E^{2k-1}(0)) - \eta_1 E^{2k-1}(0)}$$

which, setting

$$T = \log \left( \frac{\eta_1 E^{2k-1}(0)}{\eta + \eta_1 E^{2k-1}(0)} \right)^{\frac{1}{\eta}},$$

implies that  $u$ , in view of (44), blows up at time  $T$ .

## 7 Diffusive logistic equation

The dynamic of a population inhabiting a strongly heterogeneous environment can be modelled by a diffusive equation of the form

$$u_t = \nabla \cdot (d(u) \nabla u) - \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + a(\mathbf{x}) u - c u^2 \quad (46)$$

where  $u$  denotes the population density,  $d(u)$  the (density dependent) diffusion rate,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  the drift,  $c$  the limiting effects of crowding and  $a(\mathbf{x})$  the local growth rate of population.[8]-[10]

To (46) we append the initial and boundary conditions (2)<sub>3</sub> and we assume that

$$d(u) \geq d_0 \quad (47)$$

with  $d_0$  positive constant.

Equation (46) can be written

$$u_t = \nabla \cdot (F'(u)\nabla u) + f(\mathbf{x}, u, \nabla u)$$

by letting  $d(u) = F'(u)$  and  $f(\mathbf{x}, u, \nabla u) = -\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + a(\mathbf{x})u - cu^2$

Our aim is to show that (46) under the assumption (47) and

$$\begin{cases} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{b} \leq b_1 & \text{in } \Omega \\ a(\mathbf{x}) \leq a_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{48}$$

with  $b_1$  and  $a_0$  positive constant, has an absorbing set in  $L^2(\Omega)$ .

In fact, in view of (47) and (11), one obtains

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq -d_0 \bar{\lambda} \|u\|^2 - \int_{\Omega} (\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u) u d\Omega + \int_{\Omega} a(x) u^2 d\Omega - c \int_{\Omega} u^3 d\Omega.$$

Then, by virtue of (48) it turns out that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq -d_0 \bar{\lambda} \|u\|^2 + \frac{1}{2} b_1 \|u\|^2 + a_0 \|u\|^2 - c \int_{\Omega} u^3 d\Omega. \tag{49}$$

On the other hand the Young inequality implies

$$a_0 \|u\|^2 \leq \frac{2c^{\frac{3}{2}}}{3} \int_{\Omega} u^3 d\Omega + \frac{a_0^3}{3c^3} |\Omega|. \tag{50}$$

Hence choosing  $\epsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{3c}{2}$ , one obtains

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq \left( \frac{b_1}{2} - d_0 \bar{\lambda} \right) \|u\|^2 + \frac{4a_0^3}{27c^2} |\Omega|$$

that, by (26), becomes

$$\dot{E}(t) + C_1 E(t) \leq C_2$$

with

$$C_1 = 2 \left( d_0 \bar{\lambda} - \frac{b_1}{2} \right) \quad \text{and} \quad C_2 = \frac{4a_0^3}{27c^2} |\Omega|$$

Integrating one obtains

$$E(t) \leq e^{-C_1 t} E(0) + \frac{C_2}{C_1} (1 - e^{-C_1 t})$$

and the existence of an absorbing set in  $L^2(\Omega)$  is implied by  $C_1 \geq 0$  (i.e.  $d_0 \bar{\lambda} \geq \frac{b_1}{2}$ ).

**Remark 7.1** Equations similar to (1) are extensively present and studied in the literature. In particular in [16] the case

$$F = du$$

where  $d$  is a positive constant and

$$f = g(\mathbf{x}, u) = \sum_{j=0}^{2p-1} b_j(\mathbf{x}) u^j \quad b_{2p-1} > 0.$$

is intensively analyzed under Dirichlet boundary conditions, Neumann boundary conditions or space periodic boundary conditions.

## 8 Appendice - Proof of (6).

We begin by noticing that,  $F'(u)$  is uniformly continuous on any subset  $[a, b]$  with  $\{a = \text{const.} > U_1 = \inf_{\Omega} U, b = \text{const.} < U_2 = \sup_{\Omega} U\}$  and hence

$$\forall \eta > 0, \quad \exists \epsilon(\eta) > 0 : |U'' - U'| < \epsilon$$

implies

$$F'(U') - \eta \leq F'(U'') \leq F'(U') + \eta; \quad U', U'' \in [a, b]. \quad (51)$$

On choosing

$$\begin{cases} U' = U(x), & m = \eta, \\ U'' = U' + v \end{cases}$$

from (51) it turns out that there exists a positive constant  $\epsilon$  such that

$$|v| < \epsilon \Rightarrow m \leq F'(U + v) \leq m^* \quad m^* = m + m_1. \quad (52)$$

## Acknowledgement(s)

This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M.

## References

- [1] J. N. Flavin and S. Rionero, *Qualitative Estimates for Partial Differential Equation, An Introduction*, CRC Press, Boca Raton, FL, (1995).
- [2] J. Smoller, *Shock waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, n.258 of "A Series of Comprehensive Studies in Mathematics", (1983).
- [3] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Biomathematics Text, 19, Springer-Verlag, (1989).
- [4] Lawrence C. Evans, *Partial differential Equations*, 1992.
- [5] F. Capone, S. Rionero and I. Torcicollo, *On the stability of solutions of the remarkable equation  $u_t = \Delta F(x, u) - g(x, u)$* , Suppl. Rend. Cir. Mat. Palermo, serie II, n.45, (1996).
- [6] S. Rionero, *Asymptotic properties of solutions to nonlinear possibly degenerated parabolic equations in unbounded domains*, Math. and Mech. of Solids, (2003).
- [7] S. Rionero, *A rigorous reduction of the  $L^2$ -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es to the stability of the solutions to a linear binary system of O.D.Es.*, Journal of math. Analysis and Application 319, 372-392, (2006).
- [8] I. Torcicollo and M. Vitiello, *A note on the nonlinear pointwise stability in the exterior of a sphere*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli, Vol. LXX, pp.111-117, (2003).
- [9] S. Rionero, *On the longtime behaviour of the solutions of nonlinear parabolic equations in unbounded domains*, Proceedings Wascom 2001, World Scientific, Singapore, 447-457, (2002).
- [10] S. Rionero, M. Vitiello, *Stability properties of the reaction diffusion equation with Robin boundary condition*, Proceedings Wascom 2007, World Scientific, Singapore, 495-501, (2008).
- [11] R. S. Cantrell, C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments*, J. Math. Anal. vol 22, n4, 1043-1064, (1991).

- [12] R. S. Cantrell, C. Cosner, *Conditional persistence in logistic models via nonlinear diffusion*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 132 A, 267-281, (2002).
- [13] K. Rektoris, *Variational methods in Mathematics*, Science and Engineering D. Reidd Publ. Co., (1980).
- [14] Schm, *On a nonlinear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions with an application to population dynamics*, Comm. Partial Diff. Eq. 8, n. 11, 1199-1228, (1983).
- [15] S. Rionero, M. Vitiello, *Longtime behaviour of the solutions of a nonlinear reaction diffusion equation under Robin boundary data*, (to appear).
- [16] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 68, Springer, New York, (1997).

# A family of sharp isoperimetric inequalities for bodies of revolution

Nota di Guglielmo Di Meglio\*

Presentata dal socio Vincenzo Ferone  
(Adunanza del 6 novembre 2009)

*Key words:* isoperimetric inequality, bodies of revolution, Steiner symmetrization, Schwarz rearrangement.

**Abstract** - In this note we prove a family of isoperimetric inequalities for rotation bodies arising from a symmetrization problem related to Hardy-Sobolev inequalities.

**Riassunto** - Nella presente nota dimostriamo una famiglia di disuguaglianze isoperimetriche per corpi di rotazione derivante da un problema di simmetrizzazione collegato alle disuguaglianze di Hardy-Sobolev.

*MSC* (2010): Primary 26D10; Secondary 51M16, 47J30.

---

\*Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università di Napoli "Federico II", Complesso Monte Sant'Angelo, Via Cinthia, 80126 Napoli, Italy.  
*Email:* [guglielmo.dimeglio@unina.it](mailto:guglielmo.dimeglio@unina.it)

## 1 Introduction

In this article we prove a family of sharp isoperimetric inequalities for bodies of revolution in  $\mathbb{R}^N$  with  $N \geq 3$ , namely:

$$(1) \quad [\text{Per}(D) - a(N - 2) \text{Sec}(D)]^N \geq \gamma_N(a) \text{Vol}^{N-1}(D) \quad ,$$

depending on the parameter  $a \in [0, 1]$ .

In (1) the symbols  $\text{Vol}(D)$ ,  $\text{Per}(D)$  and  $\text{Sec}(D)$  denote respectively the volume, the perimeter and the weighted measure with respect to a weight which depends only on the distance of the points of  $D$  from the rotation axis; on the other hand,  $\gamma_N(a)$  is a non negative constant which depends only on dimension  $N$  and on  $a$ .

Moreover we are able to characterize equality in (1), so that  $\gamma_N(a)$  turns out to be the best constant for inequality (1).

We were led to this result searching for a symmetrization method which allows us to find the best constant in the *Hardy-Sobolev inequality*:

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \, dy \geq c \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p^*(q)}}{|x|^q} \, dx \, dy \right)^{\frac{p}{p^*(q)}} \quad \forall u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

where:  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}_x^k \times \mathbb{R}_y^{N-k}$ ;  $k, p, q$  satisfy  $2 \leq k \leq N$ ,  $1 < p < N$ ,  $0 \leq q \leq p$ ,  $q < k$ , with  $p^*(q) = p \frac{N-q}{N-p}$ ;  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  is the closure of  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  with respect to the norm  $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} := \|\nabla u\|_{L^p}$ .

In particular, inequalities of the type (1) seem to play a role in the case  $q = 1$ .

Inequalities of the type (2) with  $k = N$  were established as particular cases in [5], where a more general class of inequalities with weights was proved as interpolation between the classical Sobolev and Hardy inequalities.

The results of Caffarelli, Kohn & Nirenberg were extended in various directions: for instance, the full case  $2 \leq k \leq N$  was considered in [2], where it was proved that (2) holds and that the best constant is attained when  $q < p$ .

The shape of the solutions of the variational problem associated to (2) was determined in [1] in the special case  $N = 3$ ,  $k = 2$ ,  $p = 2$ ,  $q = 1$  combining an inequality satisfied by the Grushin operator (proved in [4]) and the classical Polya-Szegö principle for the Steiner rearrangement of a function

in  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ .

Even if the question of the shape of the minimizer in (2) for general values of  $N, k, p, q$  was left open, the authors were able to give a two parameters family of positive solutions of the Euler-Lagrange equation associated to the variational problem (which involves the  $p$ -Laplacian operator) in the case  $q = 1$ :

$$(3) \quad u(x, y; \alpha, \beta) := \alpha \left[ (1 + \beta|x|)^2 + \beta^2|y|^2 \right]^{-\frac{N-p}{2(p-1)}}$$

where  $\alpha, \beta > 0$ ; moreover, they pointed out that the level sets of those functions satisfy equality in a geometric inequality of type (1).

Some symmetry properties of the solutions of Euler-Lagrange equation associated to problem (4) in the case  $p = 2, q = 1$ , as well as their connections with other interesting geometric questions, were established in the series of articles [9], [8], [6] and [7].

When we want to find the best constant in (2) by symmetrization, we have to solve the problem in two steps: the first one, said *symmetrization result*, consists in proving that we can restrict the analysis to functions having particular symmetry properties; the second step consists in applying known techniques of Calculus of Variations to solve a constrained minimum problem.

For instance, this method works when we want to find the best constant in the classical Sobolev inequality (e.g. [11]), for we can reduce to a typical one-dimensional problem of the Calculus of Variations.

In our case, even if we can find the way to restrict the analysis to functions exploiting the same kind of symmetry of the ones in (3), the minimum problem reduces to a two-dimensional problem whose solution is not easy.

However, when we want to prove a symmetrization result, isoperimetric inequalities play a key role: in fact, they can force the level sets of extremal functions to have a shape that minimize/maximize some of the terms we are dealing with.

If the inequality we are looking for has to play a role in minimizing the ratio:

$$(4) \quad \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \, dy}{\left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p^*(1)}}{|x|} \, dx \, dy \right)^{\frac{p}{p^*(1)}}},$$

with  $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  and  $p^*(1) = p \frac{N-1}{N-p}$ , it has to be stated in terms of the right quantities.

If we take a function  $u$  sufficiently regular with compact support, Hölder inequality and the classical isoperimetric inequality imply that:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \, dy \geq \int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{H}_{N-1}^p(\{u = s\})}{(-\mu'(s))^p} \, ds$$

where  $\mu(s)$  is the  $N$ -dimensional Lebesgue measure of the level set  $\{u > s\}$  (hence it is a volume),  $\mathcal{H}_{N-1}(\{u = s\})$  is the  $(N - 1)$ -dimensional Hausdorff measure of  $\{u = s\} = \partial\{u > s\}$  (hence it is a perimeter). On the other hand, an application of Fubini's theorem shows that:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^{p^*(1)}}{|x|} \, dx \, dy = p \int_0^{+\infty} s^{p-1} \mu_1(s) \, ds$$

where  $\mu_1(s) = \int_{\{u>s\}} \frac{1}{|x|} \, dx \, dy$  is the weighted measure of the level set  $\{u > s\}$  with respect to the weight  $\frac{1}{|x|}$ .

Hence the ratio in (4) can be decreased in a natural way using geometric quantities related to the shape of the level sets of  $u$ ; therefore the isoperimetric inequality we are looking for has to establish a relation between the volume, the perimeter and the weighted measure  $\mu_1$  of those level sets.

Our aim is to prove isoperimetric inequalities for special bodies of revolution and to extend them to a larger class of bodies of revolution in  $\mathbb{R}^N$ . Finally, in the last section we will consider inequalities like (1) for sets which are radially symmetric with respect to a  $h$ -dimensional affine subspace, with  $2 \leq h \leq N$ .

## 2 Isoperimetric inequalities for symmetric bodies of revolution

In what follows we consider  $N \in \mathbb{N}$  fixed and greater than 2; a point in  $\mathbb{R}^N$  will be denoted by  $(x, y)$ , with  $x \in \mathbb{R}^{N-1}$  and  $y \in \mathbb{R}$ ; the Lebesgue measure of the unit ball in  $\mathbb{R}^N$  will be  $\omega_N$ .

Let us consider the set:

$$(5) \quad \mathcal{C} := \left\{ f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[ : \begin{array}{l} f \text{ is not-increasing,} \\ \text{smooth and satisfies } f(0) \geq 0 \end{array} \right\},$$

where *smooth* means that  $f \in C_c([0, +\infty]) \cap C_{\text{piec}}^1([0, +\infty])$ .

DEFINITION 2.1: When we choose a function  $f \in \mathcal{C}$  and a point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^N$ , the set:

$$(6) \quad D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq f(|y - y_0|) \text{ and } |y - y_0| \in \text{supp } f \right\}$$

will be called *symmetric body of revolution described by  $f$  around  $(x_0, y_0)$*

*Remark 2.1:* A symmetric body of revolution around a point  $(x_0, y_0)$  is axially-symmetric about the straight line  $r_0: x = x_0$  and also symmetric about the hyperplane  $\Pi_0: y = y_0$ .

The point  $(x_0, y_0)$  is the “center of mass” of  $D$ .  $\diamond$

The volume  $\text{Vol}(D)$  (i.e. the  $N$ -dimensional Lebesgue measure of  $D$ ) and the perimeter  $\text{Per}(D)$  of a symmetric body of revolution  $D$  described by a function  $f \in \mathcal{C}$  around  $(x_0, y_0)$  can be easily computed in cylindrical coordinates:

$$(7) \quad \text{Vol}(D) = 2\omega_{N-1} \int_0^{+\infty} f^{N-1}(t) dt,$$

$$(8) \quad \text{Per}(D) = 2(N-1)\omega_{N-1} \int_0^{+\infty} \sqrt{1 + |f'(t)|^2} f^{N-2}(t) dt.$$

The inequality that we are going to prove involves also the weighted measure  $\text{Sec}(D)$  (with respect to the weight  $W(x) := \frac{1}{|x-x_0|}$ ) of the body  $D$ : like  $\text{Vol}(D)$  and  $\text{Per}(D)$ , the value of  $\text{Sec}(D)$  can be computed in cylindrical coordinates:

$$(9) \quad \text{Sec}(D) = 2 \frac{N-1}{N-2} \omega_{N-1} \int_0^{+\infty} f^{N-2}(t) dt.$$

*Remark 2.2:*  $\text{Sec}(D)$  is proportional by the factor  $2 \frac{(N-1)\omega_{N-1}}{(N-2)\omega_{N-2}}$  to the  $(N-1)$ -dimensional Lebesgue measure of the sections of  $D$  determined by intersection with hyperplanes containing the rotation axis: owing to this, we can call  $\text{Sec}(D)$  *section measure of  $D$* .  $\diamond$

The following is a generalization of Theorem 3.1 in [1] and relates the values of volume, perimeter and section measure of a symmetric body of revolution:

### Theorem 2.1

For  $a \in [0, 1]$  there exists a constant  $\gamma_N(a) \geq 0$  such that inequality:

$$(10) \quad [\text{Per}(D) - a(N-2) \text{Sec}(D)]^N \geq \gamma_N(a) \cdot \text{Vol}^{N-1}(D),$$

holds for all symmetric body of revolution  $D$ ; the constant  $\gamma_N(a)$  is exactly:

$$(11) \quad \gamma_N(a) = 2(N - 1)N^N \omega_{N-1} \cdot \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1 - (u + a)^2} \, du \quad .$$

Moreover, the constant  $\gamma_N(a)$  is the best one because equality case occurs in (10) if and only if the body  $D$  is described by a function of the family:

$$(12) \quad w_a(b; t) := \begin{cases} \sqrt{b^2 - t^2} - ab & , \text{ if } t \in [0, b\sqrt{1 - a^2}] \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad ,$$

where  $b$  is a positive parameter, around any arbitrary point of  $\mathbb{R}^N$ .

*Remark 2.3:* It follows from (7)-(9) that  $\text{Per}(D) - a(N - 2) \text{Sec}(D) \geq 0$  for each  $a \in [0, 1]$ .

If  $a = 1$ , Theorem 2.1 becomes trivial.

If  $a = 0$ , (10) reduces to the classical isoperimetric inequality and  $\gamma_N(0) \geq N^N \omega_N$ ; actually we have equality  $\gamma_N(0) = N^N \omega_N$  because of the shape of the minimizers in (12). ◇

*Remark 2.4:* The classical isoperimetric inequality can be used to show that the problem of finding the best constant for an inequality of the type:

$$[\text{Per}(D) - a(N - 2) \text{Sec}(D)]^N \geq c(a, N) \text{Vol}^{N-1}(D)$$

is well posed and to get a rough lower bound for the value of the constant  $\gamma_N(a)$ .

In fact, since:

$$\begin{aligned} \text{Per}(D) - a(N - 2) \text{Sec}(D) &\geq (1 - a) \text{Per}(D) \\ &\geq (1 - a) \left( N^N \omega_N \text{Vol}^{N-1}(D) \right)^{\frac{1}{N}} \end{aligned}$$

we also have:

$$[\text{Per}(D) - a(N - 2) \text{Sec}(D)]^N \geq N^N \omega_N (1 - a)^N \text{Vol}^{N-1}(D) ;$$

hence the best constant  $\gamma_N(a)$  for (10) is greater than or at least equal to  $N^N \omega_N (1 - a)^N$ . ◇

*Remark 2.5:* The value of  $\gamma_N(a)$  can be computed as follows.

Since a differentiation with respect to  $a$  of the integral in (11) yields a

straightforward integral, for each  $k \in \{0, \dots, N-2\}$ , exactly  $k$  iterations of this differentiation/integration process can be used to show that:

$$\frac{d^k}{da^k} \left[ \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1-(u+a)^2} du \right] = (-1)^k \frac{(N-2)!}{(N-2-k)!} \times \\ \times \int_0^{1-a} u^{N-2-k} \sqrt{1-(u+a)^2} du .$$

Therefore  $\gamma_N(a)$ , as a function of  $a$ , is the (unique) solution in  $[0, 1]$  of the  $(N-2)$ th order ODE:

$$\gamma_N^{(N-2)}(a) = (-1)^{N-2} (N-2)! (N-1) N^N \omega_{N-1} \cdot (\arccos a - a\sqrt{1-a})$$

which satisfies the homogeneous conditions:

$$\begin{cases} \gamma_N(1) = 0 \\ \gamma'_N(1) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_N^{(N-3)}(1) = 0 \end{cases}$$

For  $N=3$  this problem has the solution:

$$\gamma_3(a) = 18\pi \left\{ (a^2 + 2)\sqrt{1-a^2} - 3a \arccos a \right\}$$

which was already found in [1].

In general, the solution of the previous Cauchy's problem is of the type:

$$\gamma_N(a) = \omega_{N-1} \cdot \left[ P_{N-1}(a)\sqrt{1-a^2} + Q_{N-2}(a) \arccos a \right]$$

with  $P_{N-1}(a), Q_{N-2}(a)$  real polynomials respectively of degree less than or equal to  $N-1$  and  $N-2$ .  $\diamond$

**Proof:** Because of Remark 2.3 we can limit ourselves to  $a \in ]0, 1[$ ; moreover since (10) holds for  $f(t) = 0$  we can restrict to the case  $f(0) > 0$  (so that  $\text{Vol}(D) > 0$ ).

It follows from (7)-(9) that in order to prove (10) we have to solve the minimum problem:

$$(13) \quad \gamma_N(a)^{\frac{1}{N}} = \min_{f \in \mathcal{C}} \mathcal{J}_a[f] ,$$

where  $\mathcal{J}_a[f]$  is the functional:

$$(14) \quad \mathcal{J}_a[f] := 2^{\frac{1}{N}}(N-1)\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} \frac{\int_0^{+\infty} \left\{ \sqrt{1+|f'(t)|^2} - a \right\} f^{N-2}(t) dt}{\left( \int_0^{+\infty} f^{N-1}(t) dt \right)^{\frac{N-1}{N}}}.$$

Euler-Lagrange equation for the minimum problem (13) is:

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{f^{N-2} f'}{\sqrt{1+|f'|^2}} \right] + (N-2)f^{N-3}(\sqrt{1+|f'|^2} - a) - (N-1)\lambda f^{N-2} = 0$$

and it's easily seen that each function  $w_a(b; \cdot)$  is a solution of (15) with  $\lambda = \frac{1}{b}$ , so that each of those functions is an extremal for (13).

The lack of convexity of the function generating equation (15) doesn't allow us to claim that the functions  $w_a(b; \cdot)$  give the minimum to  $\mathcal{J}_a[f]$ ; even if there are general methods to find global minima of a functional, we prefer to prove by direct calculation that:

**claim 1.** for all  $b > 0$ ,  $\mathcal{J}_a[w_a(b; \cdot)] = \gamma_N^{\frac{1}{N}}(a)$ ;

**claim 2.** for all  $f \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{J}_a[f] \geq \gamma_N^{\frac{1}{N}}(a)$ ;

**claim 3.** if  $\mathcal{J}_a[f] = \gamma_N^{\frac{1}{N}}(a)$  then  $f = w_a(b; \cdot)$  for some  $b > 0$ .

With a substitution<sup>1</sup> and an integration by parts, we get:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} w_a^{N-1}(b; t) dt &= \int_0^{b\sqrt{1-a^2}} (\sqrt{b^2 - t^2} - ab)^{N-1} dt \\ &= b^N \int_0^{1-a} u^{N-1} \frac{u+a}{\sqrt{1-(u+a)^2}} du \\ &= (N-1)b^N \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1-(u+a)^2} du, \end{aligned}$$

therefore the denominator in the r.h.s. of (14) evaluated in  $w_a(b; \cdot)$  is:

$$(16) \quad \left( \int_0^{+\infty} w_a^{N-1}(b; t) dt \right)^{\frac{N-1}{N}} = b^{N-1}(N-1)^{\frac{N-1}{N}} \times \left( \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1-(u+a)^2} du \right)^{\frac{N-1}{N}}.$$

---

<sup>1</sup>Here we put  $u = \frac{1}{b}(\sqrt{b^2 - t^2} - ab)$ .

Now we turn to the evaluation of the numerator in the r.h.s. of (14) in  $w_a(b; \cdot)$ : with the same substitution used above we find:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} w_a^{N-2}(b; t) \left\{ \sqrt{1 + |w'_a(b; t)|^2} - a \right\} dt &= \int_0^{b\sqrt{1-a^2}} \left( \sqrt{b^2 - t^2} - ab \right)^{N-2} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{b}{\sqrt{b^2 - t^2}} - a \right\} dt \\ &= b^{N-1} \int_0^{1-a} u^{N-2} \frac{1 - a(u+a)}{\sqrt{1 + (u+a)^2}} du ; \end{aligned}$$

hence, by adding and subtracting  $b^{N-1} \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1 - (u+a)^2} du$  in the last formula's r.h.s. and integrating by parts, we have:

$$\begin{aligned} b^{N-1} \left( \int_0^{1-a} u^{N-1} \frac{u+a}{\sqrt{1 - (u+a)^2}} du + \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1 - (u+a)^2} du \right) \\ = Nb^{N-1} \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1 - (u+a)^2} du , \end{aligned}$$

and:

$$(17) \quad \int_0^{+\infty} w_a(b; t) dt = Nb^{N-1} \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1 - (u+a)^2} du .$$

Plugging (16) and (17) in (14) we finally obtain:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_a[w_a(b; \cdot)] &= \{2(N-1)\omega_{N-1}\}^{\frac{1}{N}} N \left( \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1 - (u+a)^2} du \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \gamma_N^{\frac{1}{N}}(a) , \end{aligned}$$

which is **claim 1**.

Now let  $f \in \mathcal{C}$  be such that:

$$(18) \quad \|f\|_{L^{N-1}} = 1 ,$$

$\beta = \frac{f(0)}{1-a} > 0$  and let us define the auxiliary functional  $\mathcal{I}_a[f]$ :

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_a[f] &:= \int_0^{+\infty} \left\{ \sqrt{1 + |f'(t)|^2} - a \right\} f^{N-2}(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} f^{N-1}(t) dt . \end{aligned}$$

In view of the convexity of  $\sqrt{1+z^2}$ , for all  $\zeta \in \mathbb{R}$  we have:

$$(20) \quad \sqrt{1+|f'(t)|^2} \geq \sqrt{1+\zeta^2} + \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}(f'(t)-\zeta);$$

in particular, if in the previous inequality we choose:

$$(21) \quad \zeta(f) = -\frac{\sqrt{\beta^2-(f+a\beta)^2}}{f+a\beta}$$

we deduce that the following inequality:

$$(22) \quad \begin{aligned} \sqrt{1+|f'(t)|^2} &\geq \frac{\beta}{f(t)+a\beta} - \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2-(f(t)+a\beta)^2} \times \\ &\quad \times \left( f'(t) + \frac{\sqrt{\beta^2-(f(t)+a\beta)^2}}{f(t)+a\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \left( f(t)+a\beta - \sqrt{\beta^2-(f(t)+a\beta)^2} f'(t) \right). \end{aligned}$$

holds for  $t \in [0, +\infty[$  except for (at most) a finite number of points. Owing to (22) we can decrease  $\mathcal{I}_a[f]$  as follow:

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}_a[f] &\geq -\frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} f^{N-2}(t) \sqrt{\beta^2-(f+a\beta)^2} f'(t) dt \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta(1-a)} f^{N-2} \sqrt{\beta^2-(f+a\beta)^2} df \\ &= \beta^{N-1} \int_0^{1-a} u^{N-2} \sqrt{1-(u+a)^2} du \\ &= \frac{\beta^{N-1}}{2(N-1)N^N \omega_{N-1}} \gamma_N(a). \end{aligned}$$

Recalling (18) and (19), from (23) we infer:

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \sqrt{1+|f'(t)|^2} - a \right\} f^{N-2}(t) dt \geq \frac{1}{\beta} + \frac{\beta^{N-1}}{2(N-1)N^N \omega_{N-1}} \gamma_N(a).$$

With classical tools of Differential Calculus we can evaluate the minimum of the function in the r.h.s. with respect to  $\beta$ : this leads to:

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \sqrt{1+|f'(t)|^2} \right\} f^{N-2}(t) dt \geq \frac{1}{(2\omega_{N-1})^{\frac{1}{N}}(N-1)} \gamma_N^{\frac{1}{N}}(a)$$

which is **claim 2** for functions in  $\mathcal{C}$  with  $L^{N-1}$ -norm equal to 1. If  $f \in \mathcal{C}$  has  $L^{N-1}$ -norm different from 1, we can rescale  $f$  and obtain our claim from what we have already proved: in fact, putting:

$$\varphi(t) := \frac{1}{\sigma} f(\sigma t)$$

with  $\sigma > 0$  chosen such that (18) holds for  $\varphi$ , one can verify that:

$$\mathcal{J}_a[f] = \mathcal{J}_a[\varphi] \geq \gamma_{\frac{1}{N}}(a) \quad .$$

Thus **claim 2** is proved.

Finally, let  $f \in \mathcal{C}$  be a function such that  $\mathcal{J}_a[f] = \gamma_{\frac{1}{N}}(a)$ . In this case we have equality in (20) with  $\zeta = \zeta(t)$  given by (21); since  $\sqrt{1+z^2}$  is strictly convex, equality occurs in (20) only if  $f'(t) = \zeta(t)$ , hence  $f$  solves the following Cauchy's problem:

$$\begin{cases} f'(t) = -\frac{\sqrt{\beta^2 - (f(t) + a\beta)^2}}{f(t) + a\beta} \\ f(0) = \beta(1 - a) \end{cases}$$

and therefore we have  $f(\cdot) = w_a(\beta; \cdot)$ , which is **claim 3**.

Thus our theorem is completely proved. □

*Remark 2.6:* Since a rotation of the axis doesn't change volume and perimeter, we can state that inequality (10) holds also for bodies of the type:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^N : \text{dist}((x, y), r) \leq f(\text{proj}_r(x, y)) \text{ and } |\text{proj}_r(x, y) - (x_0, y_0)| \in \nu \text{ supp } f\},$$

where  $r \subset \mathbb{R}^N$  is a straight line of direction  $\nu \in \mathcal{S}^{N-1}$  and  $(x_0, y_0) \in r$ , which are axially symmetric with respect to  $r$  and symmetric with respect to the hyperplane  $\Pi$  through  $(x_0, y_0)$  orthogonal to  $r$ .

Obviously, the section measure  $\text{Sec}(D)$  of a body of the type considered is defined by:

$$\text{Sec}(D) := \int_D \frac{1}{\text{dist}((x, y), r)} \, dx \, dy .$$

where  $\text{dist}((x, y), r)$  is the distance of the point  $(x, y)$  from  $r$ . ◇

*Remark 2.7:* We remark that formulas (7)-(9) and the arguments used in the proof of Theorem 2.1 remain valid even if  $f$  is a non-negative, Lipschitz continuous, not-increasing, compactly supported function defined in

$[0, +\infty[$ .

Therefore inequality (11) holds, with the same best constant, in the more general case when  $D$  is a body of revolution generated by a function of the type said above.  $\diamond$

Finally we note that a function  $w_a(b; \cdot)$  describes the level set  $\{u > s\}$  ( $s > 0$ ) of a function of the family (3) if and only if we choose the parameters  $a, b$  as follows:

$$a = (\alpha s)^{-\frac{p-1}{N-p}} \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{\beta} (\alpha s)^{\frac{p-1}{N-p}} .$$

### 3 Generalization of Theorem 2.1 via symmetrization

An application of a standard symmetrization technique yields that inequalities (10) hold also for bodies of revolution in  $\mathbb{R}^N$  which are not symmetric.

Let us put:

$$(24) \quad \mathcal{C}_0 := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[ : f \text{ is continuous with compact support, piecewise of class } C^1 \text{ and s.t. } 0 \text{ is the midpoint of } \text{supp } f \right\} .$$

DEFINITION 3.1: When we choose a function  $f \in \mathcal{C}_0$ , a straight line  $r \subset \mathbb{R}^N$  with direction  $\nu \in \mathcal{S}^{N-1}$  and a point  $(x_0, y_0) \in r$ , the set:

$$(25) \quad D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^N : \text{dist}((x, y), r) \leq f(\text{proj}_r(x, y)) \right. \\ \left. \text{and } \text{proj}_r(x, y) \in (x_0, y_0) + \nu \text{supp } f \right\}$$

will be called *body of revolution described by  $f$  around the axis  $r$  and the point  $(x_0, y_0)$* .

*Remark 3.1:* It's easily seen that if we take  $f \in \mathcal{C}$ , the even extension of  $f$  to the whole real line is in the class  $\mathcal{C}_0$ . Therefore symmetric bodies of revolution are particular cases of Definition 3.1.  $\diamond$

A computation in cylindrical coordinates gives the following expression for the volume  $\text{Vol}(D)$ , the perimeter  $\text{Per}(D)$  and the weighted measure

$\text{Sec}(D)$  (with respect to the weight  $W(x) := \frac{1}{\text{dist}((x,y),r)}$ ) of the body of revolution  $D$  described by  $f \in C_0$  around the axis  $r$ :

$$(26) \quad \text{Vol}(D) = \omega_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{N-1}(t) dt ,$$

$$(27) \quad \text{Per}(D) = (N - 1)\omega_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1 + |f'(t)|^2} f^{N-2}(t) dt ,$$

$$(28) \quad \text{Sec}(D) = \frac{N - 1}{N - 2} \omega_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{N-2}(t) dt ,$$

which are completely analogous to (7)-(9).

*Remark 3.2:* Note that  $\text{Vol}(D)$  and  $\text{Sec}(D)$  are proportional to the  $L^{N-1}$  and  $L^{N-2}$  norms of the function  $f$ .

Moreover, it holds for the weighted measure of a body of revolution what we wrote in Remark 2.2 about the weighted measure of a symmetric revolution body; hence we can still call  $\text{Sec}(D)$  *section measure of D*.  $\diamond$

Next we give the aforementioned generalization of Theorem 2.1:

**Theorem 3.1**

*Inequalities (10) hold true with the same best constants even if  $D$  is a body of revolution as in Definition 3.1 instead of a symmetric body of revolution.*

To prove our claim, we have to recall some notions about Steiner symmetrization of sets and Schwarz rearrangement of functions (for details see e.g. [10], [3]).

Let  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  be a measurable subset,  $\Pi$  be a hyperplane and  $r$  a straight line orthogonal to  $\Pi$ .

The *Steiner symmetric of  $E$  with respect to  $\Pi$*  is the set  $E^\sharp$  built with the following rules:

1. if  $r \cap E = \emptyset$ , then  $r \cap E^\sharp = \emptyset$ ;
2. if  $r \cap E \neq \emptyset$  and has null one-dimensional Lebesgue measure, then  $r \cap E^\sharp$  is the point  $r \cap \Pi$ ;
3. if  $r \cap E \neq \emptyset$  and has finite non-null one-dimensional Lebesgue measure, then  $r \cap E^\sharp$  is the segment lying on  $r$ , with middle-point  $r \cap \Pi$  and length equal to the one-dimensional measure of  $r \cap E$ ;

- 4. if  $r \cap E \neq \emptyset$  and has infinite one-dimensional Lebesgue measure, then  $r \cap E^\sharp$  is the whole line  $r$ .

Steiner symmetrization with respect to any hyperplane  $\Pi$  has the following important geometric properties:

**Theorem 3.2**

Let  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  be measurable and  $E^\sharp$  its Steiner symmetric w.r.t. a hyperplane  $\Pi$ . Then  $E^\sharp$  is symmetric about  $\Pi$  and:

$$(29) \quad \text{Vol}(E) = \text{Vol}(E^\sharp) ,$$

$$(30) \quad \text{Per}(E) \geq \text{Per}(E^\sharp) .$$

Now we turn to Schwarz rearrangement of functions of one variable. Let  $u \in C_c(\mathbb{R})$ ; for all  $t \geq 0$  we define the *distribution function*  $\mu_u$ :

$$\mu_u(t) := m(\{|u| > t\})$$

where  $m(\cdot)$  denotes the Lebesgue measure in  $\mathbb{R}$ .

The *Schwarz rearrangement* of  $u$  is the function  $u^*$  defined by:

$$u^*(y) := \sup\{t \geq 0 : \mu_u(t) > 2|y|\} .$$

Schwarz rearrangement has the following properties:

**Theorem 3.3**

Let  $u \in C_c(\mathbb{R})$  and  $u^*$  be the Schwarz rearrangement of  $u$ .

Then  $u^*$  is an even, non-negative, continuous, compactly supported function which has the same distribution function of  $u$  (i.e.  $u$  and  $u^*$  are equimeasurable) and, for all  $p \in [1, +\infty]$ , one has:

$$(31) \quad \|u\|_p = \|u^*\|_p .$$

Moreover, if  $u$  is piecewise of class  $C^1$  then  $u^*$  is Lipschitz.

What we need to point out is the close connection between Steiner symmetrization of a body of revolution described by  $f \in \mathcal{C}_0$  and the Schwarz rearrangement of the function  $f$ :

**Lemma 3.1**

If  $D$  is a body of revolution described by  $f \in \mathcal{C}_0$  around the axis  $r$  and

the point  $(x_0, y_0)$  then, for all hyperplanes  $\Pi$  orthogonal to  $r$ , the Steiner symmetric  $D^\sharp$  is the symmetric body of revolution described by the function:

$$f^\sharp := f^* \Big|_{[0, +\infty[}$$

around the intersection point  $(x_1, y_1)$  of  $r$  and  $\Pi$ .

The proof of Lemma 3.1 follows from the definitions of Steiner and Schwarz rearrangements and it relies on elementary geometric considerations; we omit it.

*Remark 3.3:* Since  $f \in \mathcal{C}_0$  implies that  $f^\sharp$  is Lipschitz,  $\text{Per}(D^\sharp)$  can be evaluated by means of (9).  $\diamond$

In view of properties (29)-(31) of Steiner symmetrization and Schwarz rearrangement, of Proposition 3.1, of Remarks 3.2 and 3.3, we can state that the following relations:

$$(32) \quad \text{Vol}(D) = \text{Vol}(D^\sharp) ,$$

$$(33) \quad \text{Per}(D) \geq \text{Per}(D^\sharp) ,$$

$$(34) \quad \text{Sec}(D) = \text{Sec}(D^\sharp) .$$

hold true for all bodies of revolution and their symmetric with respect to hyperplanes orthogonal to their axis.

Relations (32)-(34) lead to a simple proof of Theorem 3.1, as we now show.

**Proof:** (of Theorem 3.1). Owing to (32)-(34) and (10), we have:

$$\begin{aligned} [\text{Per}(D) - a(N-2)\text{Sec}(D)]^N &\geq [\text{Per}(D^\sharp) - a(N-2)\text{Sec}(D^\sharp)]^N \\ &\geq \gamma_N(a) \text{Vol}^{N-1}(D^\sharp) \\ &= \gamma_N(a) \text{Vol}^{N-1}(D) \end{aligned}$$

where  $D^\sharp$  is the Steiner symmetric of  $D$  with respect to, say, the hyperplane orthogonal to the axis  $r$  through the point  $(x_0, y_0)$ .  $\square$

## 4 Remarks on a more general family of inequalities

In this section, we want to point out that inequality of type (10) also holds for symmetric bodies which feature a more general kind of symmetry.

In fact, starting with a function  $f \in \mathcal{C}$  and a point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h$  (with  $k + h = N$ ) we can build sets of the type:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h : |x - x_0| \leq f(|y - y_0|) \text{ and } |y - y_0| \in \text{supp } f\}$$

which are symmetric about the  $k$ -dimensional affine subspace of equations  $y = y_0$  and radially-symmetric about the  $h$ -dimensional affine subspace of equations  $x = x_0$ ; we can call a set of the previous type *cylindrically symmetric set described by  $f$  around  $(x_0, y_0)$* .

Volume, perimeter and weighted measure with respect to the weight  $\frac{1}{|x-x_0|}$  of a cylindrically symmetric set  $D$  described by  $f$  can be easily computed in cylindrical coordinates:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= h\omega_h\omega_k \int_0^{+\infty} f^k(t) t^{h-1} dt, \\ \text{Per}(D) &= hk\omega_h\omega_k \int_0^{+\infty} \sqrt{1 + |f'(t)|^2} f^{k-1}(t) t^{h-1} dt, \\ \text{Sec}(D) &= h\frac{k}{k-1}\omega_h\omega_k \int_0^{+\infty} f^{k-1}(t) t^{h-1} dt. \end{aligned}$$

Considering that for each  $a \in [0, 1]$  we have  $\text{Per}(D) - a(k-1)\text{Sec}(D) \geq 0$ , we can use the classical isoperimetric inequality as in Remark 2.4 to state that:

$$\text{Per}(D) - a(k-1)\text{Sec}(D) \geq (1-a)N\omega_N^{\frac{1}{N}} \text{Vol}^{\frac{N-1}{N}}(D);$$

this means that volume, perimeter and weighted measure of cylindrically symmetric bodies are involved in sharp isoperimetric inequalities completely analogous to (10): hence we can state:

**Theorem 4.1**

For each  $a \in [0, 1]$  there exists at least a constant  $c(k, h, a) \geq 0$  such that inequality:

$$(35) \quad [\text{Per}(D) - a(k-1)\text{Sec}(D)]^N \geq c(k, h, a) \text{Vol}^{N-1}(D),$$

holds for all cylindrically symmetric bodies.

Therefore it makes sense to consider the problem of finding the best constant  $\gamma_{k,h}(a)$  and the shape of the cylindrically symmetric bodies for which equality holds in (35) with  $c(k, h, a) = \gamma_{k,h}(a)$ .

The constant  $N^N\omega_N(1-a)^N$  is obviously optimal and functions  $w_0(b; t) := \sqrt{b^2 - t^2}$  give the shape of the minimizers in (35) if  $a = 0$  (for in this case

inequality reduces to the classical isoperimetric inequality); on the other hand, if  $a = 1$ , a direct calculation shows that each function  $w_1(b; t) := \sqrt{b^2 - t^2} - b$  satisfies equality in (35) with constant  $c(k, h, 1) = 0$ , hence the best constant is  $\gamma_{k,h}(1) = 0$ .

Nevertheless we have no clues what to expect when  $a \in ]0, 1[$ , except that inequality  $\gamma_{k,h}(a) \geq N^N \omega_N (1 - a)^N$  has to hold.

The functions of the family (12) solve Euler-Lagrange equation relative to the constrained minimum problem associated to inequality (35), which is:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + |f'(t)|^2}} f^{k-1}(t) t^{h-1} \right] - (k - 1) \{ \sqrt{1 + |f'(t)|^2} - a \} \times \\ \times f^{k-2}(t) t^{h-1} + \lambda k f^{k-1}(t) t^{h-1} = 0 ,$$

(in fact  $w_a(b; \cdot)$  solves the equation if  $\lambda = \frac{k+h-1}{bk}$ ). The lack of convexity of the function generating the previous equation doesn't allow us to claim that the  $w_a(b; \cdot)$ s solve our minimum problem for  $a \in ]0, 1[$  as they do in the cases  $a = 0, 1$ .

However, we suspect that those functions are actually the shapes of the minimizers of (35) also for  $a \in ]0, 1[$ ; in this case, the best constant in (35) could have the form:

$$\gamma_{k,h}(a) := N^N k \omega_h \omega_k \cdot \int_0^{1-a} u^{k-1} [1 - (u + a)^2]^{\frac{h}{2}} du$$

Unfortunately we are not able to completely prove such a claim.

## References

- [1] A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti (2006), *On the best constant in a Hardy-Sobolev inequality*, *Applicable Analysis*, **85** (1-3), 171-180.
- [2] M. Badiale, G. Tarantello (2002), *A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in Astrophysics*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **163** (4), 259-293.
- [3] C. Bandle (1980), *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, Boston
- [4] W. Beckner (2001), *On the Grushin operator and hyperbolic symmetry*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **129** (4), 1233-1246.

- [5] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg (1984), *First order interpolation inequalities with weights*, *Compositio Mathematica*, **53** (3), 259-275.
- [6] D. Castorina, I. Fabbri, G. Mancini, K. Sandeep (2008), *Hardy-Sobolev inequalities and hyperbolic symmetry*, *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni*, **19**, 189-197.
- [7] D. Castorina, I. Fabbri, G. Mancini, K. Sandeep (2009), *Hardy-Sobolev extremals, hyperbolic symmetry and scalar curvature equations*, *Journal of Differential Equations*, **246** (2), 1187-1206.
- [8] G. Mancini, I. Fabbri, K. Sandeep (2006), *Classification of solutions of a critical Hardy-Sobolev operator*, *Journal of Differential Equations*, **224** (2), 258-276.
- [9] G. Mancini, K. Sandeep (2004), *Cylindrical symmetry of extremals of a Hardy-Sobolev inequality*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV*, **183** (2), 165-172.
- [10] J. Mossino (1984), *Inégalité Isopérimétriques et Applications en Physique*, Hermann, Paris.
- [11] G. Talenti (1976), *Best constant in Sobolev inequality*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV*, **110** (4), 353-372.

## I CLORURI NEL CALCESTRUZZO. CHLORIDES IN CONCRETE.

Nota del Socio ord. residente Riccardo SERSALE.  
(Adunanza del dì 6 Novembre 2009).

**Riassunto.** Vengono approfonditi gli effetti combinati di una ridotta impermeabilità ed alcalinità dei calcestruzzi armati, con conseguente neutralizzazione dello strato passivo che protegge l'armatura.

Vengono discussi: i processi chimici e fisici coinvolti nel movimento degli ioni cloruro nelle strutture cementizie e la dipendenza dei coefficienti di diffusione: dal tipo di cemento, dal rapporto acqua/cemento, dalla porosità, dalla permeabilità, dalla diversa conformazione dei pori capillari, prodotta dalla presenza di aggiunte minerali.

Viene infine analizzato in dettaglio ogni espediente idoneo a rallentare la velocità di penetrazione degli ioni nel copriferro e prospettato il possibile ed eccezionale ricorso, in vista dei costi, ad acciai resistenti alla corrosione ( inossidabili, galvanizzati, rivestiti di resina epossidica, compositi).

**Parole chiave:** Calcestruzzo armato. Corrosione. Ioni cloruro.

**Summary.** The combined effects of impermeability and alkalinity reduction in reinforced concretes, with consequent breakdown of the passive layer protecting the steel cover, are investigated.

The chemical and physical process involved in the chloride ions movement in cementitious structures and the dependence of diffusion coefficients upon : cement type, water/cement ratio, porosity, permeability, tortuosity of capillary pores, due to the presence of mineral admixtures, are discussed.

At last any device suitable for slowing down the ions penetration rate in the steel cover is analyzed and the possible and exceptional use of corrosion-free steels (stainless steel, galvanized, epoxy coated, glass fibre-reinforced rebars), due to the high cost, pointed out.

**Key words:** Reinforced concrete. Corrosion. Chloride ions.

Il trasporto dell'umidità nei sistemi porosi riveste un ruolo determinante nel degrado di materiali da costruzione, quali malte e calcestruzzi. In particolare, l'invasione dell'acqua nei manufatti determina un meccanismo che apre la strada alla penetrazione di ioni aggressivi.

Nel calcestruzzo armato l'acciaio subisce un severo fenomeno di attacco per effetto dell'ingresso degli ioni cloruro, con conseguente degrado della struttura. È pertanto determinante il controllo e la modellazione dell'ingresso di tali ioni nei manufatti.

Il principale meccanismo di trasporto dell'ingresso dei cloruri nel calcestruzzo è costituito dalla diffusione e dalla suzione capillare. Poiché la diffusione, da sola, è un processo piuttosto lento, è verosimile che il trasporto capillare, specialmente alla superficie del manufatto, costituisca il meccanismo dominante dell'invasione, con severe ricadute economiche.

I cloruri possono provenire da fonti esterne, od anche esser introdotti negli impasti all'atto della loro formulazione, con addizione, ad esempio, di additivi acceleranti, sabbie od aggregati marini scarsamente lavati. Un'altra fonte di cloruri può esser l'impiego di agenti disgelanti a basso costo, quali, cloruri: sodico, potassico o di calcio, per il disgelamento di ponti e strade situati in regioni climatiche fredde.

Un considerevole numero di ricerche (1) ha preso in esame gli effetti combinati della permeabilità e dell'alcalinità dell'acqua dei pori della pasta di cemento, per far luce sulla loro interazione nell'abbattimento della passività dell'acciaio anegato nel calcestruzzo.

Inizialmente, l'armatura è naturalmente protetta dall'alta alcalinità della soluzione dei pori (2). Lo stato passivo può, però, esser neutralizzato per effetto della distruzione del film di ossido che protegge l'acciaio. Gli agenti principali che comportano la distruzione di tale film passivo sono : la penetrazione dei cloruri e quella del biossido di carbonio (3).

Allorché il calcestruzzo armato viene in contatto con cloruri, essi penetrano nel copriferro con una velocità che dipende dalla loro concentrazione esterna, dalla porosità del manufatto, dall'attitudine della matrice cementizia a legare cloruri e da alcuni parametri ambientali, quali : umidità relativa e temperatura.

Quando una sufficiente quantità di cloruri raggiunge l'armatura, ha luogo una locale rottura del film passivo ed inizia la corrosione dell'acciaio, con notevole pregiudizio per la durabilità del manufatto. Per tale ragione è imperativo allungare il tempo necessario ai cloruri per penetrare il copriferro. Mediante nuove formulazioni degli impasti, idonei a migliorare la resistenza alla penetrazione dei cloruri, normalmente si cerca di ridurre la porosità ed accrescere l'attitudine della matrice cementizia a legarli.

Nello studio del processo di corrosione indotto dalla penetrazioni di cloruri, uno dei parametri che riveste maggior interesse è stabilire la soglia di concentrazione di cloruro, ossia la quantità di cloruro necessario a distruggere lo stato passivo ed iniziare la corrosione dell'armatura anegata nella matrice cementizia, espressa come percentuale rispetto al peso di cemento. Un valore cui si fa largamente riferimento corrisponde a 0,4% di Cl rispetto al peso di cemento (4).

La corrosione delle barre di acciaio influenza la durabilità del calcestruzzo in due modi: riduce la sezione trasversale delle barre, diminuendo la loro capacità di sopportare carichi e compromettendo l'integrità del calcestruzzo circostante. I prodotti di corrosione del ferro (5) sono tutti espansivi (Fig.1) e possono infatti causare rottura del calcestruzzo. Il prodotto di corrosione più espansivo, rilevato finora in calcestruzzi fratturati, risulta l'idrossido ferrico, con un volume specifico quattro volte maggiore di quello del ferro (6).

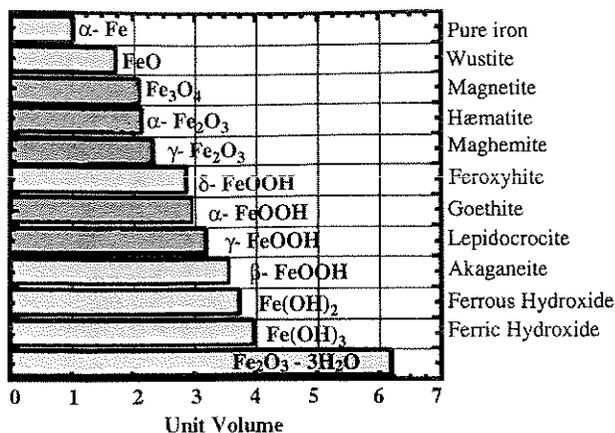


Figura 1. Prodotti di corrosione del ferro (5).

Gli ioni cloruro penetrano nella soluzione interstiziale e possono anche reagire con l'alluminato tricalcico anidro, formando monocloroalluminati che modificano favorevolmente la microstruttura del calcestruzzo, perché legano cloruri e riducono la potenziale soglia di corrosione se il calcestruzzo è armato. È stato perciò suggerito (4) di incorporare nella miscela formulata un prodotto ad alto contenuto di  $Al_2O_3$  costituito da un catalizzatore zeolitico esaurito, largamente impiegato nell'industria petrolchimica, il quale, grazie alla sua alta attività "pozzolanica" (7), forma nel corso del processo d'idratazione alluminati e silicoalluminati di calcio, idonei a legare cloruri provenienti da una fonte esterna, sottraendoli alla potenziale reazione di corrosione. È stato posto in luce che per incorporazione del 15% di catalizzatore zeolitico esausto, la soglia di concentrazione di cloruro necessaria a neutralizzare lo stato passivo dell'acciaio sale dal 0.4% al 2%, rispetto al peso di cemento (4).

Normalmente la corrosione dell'armatura inizia con lo sviluppo di una rete di microfessure del copriferro, che facilitano l'ulteriore penetrazione di cloruri e finiscono con la sua scheggiatura, per effetto delle forze espansive che fanno seguito alla formazione di ruggine. Tale scheggiatura espone una nuova superficie del manufatto all'azione degli ioni cloruro e la corrosione va avanti.

Nella pasta di cemento il coefficiente di diffusione effettiva di specie ioniche risulta minore per un fattore mille rispetto a quello dell'acqua e decresce al decrescere del rapporto acqua/cemento, della temperatura, della durata della stagionatura e dello spessore del campione (8).

Il rapporto acqua/cemento costituisce il principale parametro che influenza la penetrazione di ioni cloruro nel calcestruzzo. A basso rapporto acqua/cemento si registra infatti un rallentamento della penetrazione di ioni, attribuibile ad un affinamento dei pori capillari. Gli ioni cloruro sono costretti a diffondere attraverso una rete più tortuosa e più sconnessa di pori. Il rimpiazzo di clinker con prodotti supplementari tende inoltre a ridurre notevolmente la mobilità degli ioni cloruro all'interno della struttura (9).

È stato anche studiato il ruolo dell'alcalinità della soluzione dei pori della pasta di cemento sulla penetrazione degli ioni cloruro, rilevando che tale penetrazione cresce fortemente con la diminuzione del pH (10).

La corrosione dell'armatura si registra ogniqualvolta il copriferro, preposto a proteggerla dall'ossidazione e dall'arrugginimento, non esercita più il suo compito. Le principali cause che possono produrre questo incidente sono: un rapporto troppo alto acqua/cemento; una scarsa durata, od addirittura l'assenza di stagionatura; una disposizione errata delle barre d'acciaio, perché poste eccessivamente vicine alle forme; la carbonatazione e la penetrazione di cloruri.

Un calcestruzzo con resistenza a compressione minore di 30 MPa è un calcestruzzo permeabile, qualunque sia l'ambiente in cui viene impiegato (11) ed è un calcestruzzo che non offre nemmeno appropriata protezione dalla carbonatazione. Qualunque calcestruzzo preparato con rapporto acqua/cemento superiore a 0.50, presenta una struttura molto aperta, che offre ampia possibilità di penetrazione agli ioni aggressivi. Più basso il rapporto acqua/cemento, più impermeabile risulta il calcestruzzo. Un calcestruzzo a rapporto acqua/cemento 0.30 - 0.35 non è permeabile. Lo spessore del copriferro deve però risultare in relazione alla severità dell'ambiente e l'impasto deve esser gettato e stagionato a dovere. Un basso rapporto acqua/cemento, un'appropriata gettata ed un'adeguata stagionatura, costituiscono pertanto l'impegno indispensabile a proteggere l'armatura dalla corrosione. Tale impegno non è troppo oneroso se si tiene conto anche della durata della vita in servizio della struttura.

Per interpretare il fenomeno di corrosione prodotto dall'ingresso di ioni cloruro nel calcestruzzo sono state proposte due spiegazioni: la teoria per adsorbimento e quella per formazione di film di ossido. Il meccanismo per adsorbimento propone che gli ioni cloruro vengano preferenzialmente adsorbiti sulla superficie metallica, in competizione con l'ossigeno e gli ioni idrossido disciolti. Viene ipotizzato che gli ioni cloruro rimuovano le specie passivanti, determinando la nascita di crateri di corrosione (12). Il meccanismo che si rifà al film di ossido ipotizza che gli ioni cloruro lo penetrino più facilmente di altri anioni, attraverso i suoi pori e difetti, con successiva nascita di

crateri di corrosione. Entrambi i meccanismi prevedono la formazione di alte concentrazioni localizzate di ioni cloruro, con conseguente acidificazione locale ed origine di crateri di corrosione. I processi chimici coinvolti nel movimento degli ioni cloruro nei manufatti cementizi sembrano più vicini ad uno scambio di cloruro con idrossido, piuttosto che ad una semplice diffusione ed in ambiente di cloruri si determini una qualche dissoluzione di idrati (13). Degna di considerazione è in particolare la ridotta velocità di movimento del cloruro nelle paste di cemento indurite, contenenti scoria d'alto forno o ceneri volanti. La più bassa velocità di penetrazione del cloruro nel cemento d'alto forno è probabilmente il risultato di una più bassa concentrazione di ossidrilioni liberi, determinando una minor capacità di scambio  $\text{OH}^- - \text{Cl}^-$  (13).

Ai fini di una protezione migliore dell'acciaio annegato nei calcestruzzi, oltre ad una riduzione di permeabilità conseguibile con una riduzione del rapporto acqua/cemento, viene suggerito il rimpiazzo di clinker con un'aliquota di pozzolana che determina una riduzione della velocità di penetrazione degli ioni  $\text{Cl}^-$ . Tali cementi risultano meno permeabili agli ioni cloruro, per effetto di una differente natura della superficie dei pori. La più alta resistenza offerta dai cementi pozzolanici alla diffusione degli ioni  $\text{Cl}^-$  non può infatti esser attribuita alla presenza di prodotti d'idratazione meno porosi, od a prodotti con medesima porosità totale, ma con pori più piccoli.

Sembra ragionevole ipotizzare che la differenza nei coefficienti di diffusione dipenda da differenze nell'interazione fra ioni  $\text{Cl}^-$  e superficie dei pori. La differenza nei coefficienti di diffusione potrebbe esser anche addebitata ad una differente mobilità delle molecole d'acqua presenti nei pori del gelo, determinando un affinamento dei pori capillari, responsabile di un abbassamento del coefficiente di diffusione (8). È stata anche chiamata in causa una riduzione di elettronegatività della superficie dei pori.

La più bassa permeabilità ionica delle malte di cementi di miscela può esser posta in relazione con la struttura più fine dei pori capillari. Il coefficiente di diffusione effettiva si correla abbastanza bene con il volume dei pori di raggio minore di 2 nm, ma non con il volume dei pori. (14). Ragionevolmente, il coefficiente di diffusione sembra dipendere dalla tortuosità dei pori capillari.

Il coefficiente di diffusione degli anioni dipende poi dalla natura dei cationi con i quali si associano, poiché nel caso di  $\text{Cl}^-$  il coefficiente di diffusione decresce da  $\text{MgCl}_2$  a  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{LiCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{NaCl}$ .

Il coefficiente di diffusione apparente di  $\text{Cl}^-$  è più alto di quello dei cationi associati e la differenza può anche raggiungere un ordine di grandezza (15).

La diffusione ionica dipende dal tipo di cemento, ma nell'ambito dello stesso tipo di cemento, può anche apprezzabilmente variare. Il cemento Portland resistente ai solfati mostra coefficienti di diffusione più alti di quelli del cemento Portland ordinario.

Cementi di miscela contenenti pozzolana naturale od artificiale originano paste di cemento che hanno più bassi coefficienti di diffusione di quelli delle corrispondenti paste di cemento Portland ordinario. Con paste a rapporto acqua/cemento 0,60, il 40% di rimpiazzo di Portland con ceneri volanti provoca una riduzione di diffusività di  $\text{Cl}^-$  di un ordine di grandezza. Risultati simili sono stati ottenuti con un rimpiazzo più basso: 10% di fumo di silice (16).

Nei cementi di miscela il coefficiente di diffusione effettiva dipende dalla frazione di cemento Portland, così come dal tipo di pozzolana e decresce con il contenuto di pozzolana (17).

La più bassa diffusione di cloruri osservata nelle paste di cemento contenenti pozzolana può esser posta in relazione con la loro permeabilità, più bassa di quella del corrispondente cemento Portland. I pori capillari tortuosi di una pasta di cemento darebbero origine al medesimo impedimento geometrico per il movimento di tutte le specie disciolte.

I più bassi valori del coefficiente di diffusione effettivo, riscontrati nelle paste di cemento pozzolanico, sono anche stati attribuiti ad una certa interazione fra  $\text{Cl}^-$  e pareti dei pori, che potrebbero esser più forti in cementi di miscela, rispetto agli equivalenti cementi Portland (18).

L'aggiunta di microsilice riduce il rischio di corrosione in diversi modi. Le migliorate proprietà d'impermeabilità di calcestruzzi contenenti microsilice riduce grandemente la velocità di penetrazione dei cloruri in strutture marine o di strutture esposte a sali disgelanti.

Tali calcestruzzi denunciano anche un'altissima resistività elettrica che diminuisce grandemente la velocità di corrosione (19). Quando la porosità è l'unica variabile, il suo incremento produce un aumento della velocità di penetrazione di ioni  $Cl^-$ . A parità di rapporto acqua/cemento, il calcestruzzo preparato con cemento pozzolanico risulta meno permeabile agli ioni  $Cl^-$  di quello prodotto con cemento Portland. Tale risultato rafforza l'ipotesi che la differente conformazione della superficie dei pori, che si originano in presenza di pozzolana, giochi un ruolo determinante ai fini della penetrazione di ioni cloruro.

È ben noto che la zona interfacciale acciaio-pasta di cemento determina caratteristiche uniche nell'origine di una più alta porosità e di più grossi cristalli, rispetto al corpo della pasta di cemento. È stata perciò rilevata la microstruttura dell'interfaccia pasta di cemento-acciaio nel corso della corrosione (1). È stato posto in luce che in provini di solo cemento Portland, il film interfacciale consisteva di grossi cristalli d'idrossido di calcio. In provini nei quali il 16% di cemento Portland veniva rimpiazzato con fumo di silice condensato, i caratteri della zona interfacciale non mutavano gran che.

È stato già sottolineato che per proteggere dalla corrosione il tondino d'acciaio annegato nel calcestruzzo è buona pratica impiegare un basso rapporto acqua/cemento e porre la massima cura nella gettata e nella stagionatura. Solo in casi speciali si può ricorrere ad altre cautele che comportano, però, notevoli costi. Si può infatti impiegare: acciaio inossidabile, barre galvanizzate, barre di acciaio rivestite di resine epossidiche, barre d'acciaio rinforzate con fibre di vetro.

L'acciaio inossidabile ha normalmente un modulo elastico ed una resistenza a trazione più alte dell'acciaio ordinario; il legame con il calcestruzzo sembra però più debole.

L'acciaio galvanizzato, protetto cioè da un rivestimento di zinco, ha una più elevata resistenza alla corrosione. Lo zinco viene ossidato e, finché rimane presente e può ossidarsi, protegge l'acciaio dalla corrosione. La durata della protezione dipende pertanto dallo spessore dello zinco ed è necessario evitare contatti fra acciaio galvanizzato ed acciaio ordinario, perché si verrebbe a creare una cella galvanica che provoca una rapida corrosione del secondo. L'acciaio galvanizzato non può neppure esser saldato, perché lo zinco evaporerebbe nel corso della saldatura. Quando poi il calcestruzzo viene gettato, le barre galvanizzate originano reazioni chimiche. Lo zinco può infatti reagire con la calce libera, che si neoforma per idratazione dei silicati di calcio anidri, passare ad idrossido e produrre bolle d'idrogeno che, insediandosi nel calcestruzzo, riducono fortemente il legame calcestruzzo-barra. L'idrossido di zinco costituisce poi un ritardante dell'idratazione dei silicati di calcio. Nelle barre rivestite di resine epossidiche, lo spessore della resina è pari ad alcuni micron. Il polimero è perfettamente impermeabile ai gas, agli ioni cloruro e solfato, agli acidi.

La protezione dell'acciaio risulta però perfetta solo se il rivestimento è perfetto. Dove esso manca, a seguito della produzione di scalfitture, si origina una zona preferenziale di corrosione. Inoltre, la pasta di cemento idratata non lega bene con la barra rivestita di resina. Si rende pertanto necessario migliorare l'aderenza, mediante una rugosità, che si ottiene proiettando sulla superficie delle barre fini grani di sabbia, prima dell'indurimento della resina epossidica. Il costo è piuttosto elevato.

Recentemente è stato introdotto anche l'impiego di barre d'acciaio rinforzate con fibre di vetro (20). Tali barre, denominate anche barre composite di acciaio, costano ben più di quelle di acciaio ordinario e sono ottenute con un processo di estrusione per trazione. Di solito, i filamenti di vetro sono congiunti mediante una resina poliestere. Barre d'acciaio rinforzate con fibre di vetro sono disponibili con superfici a differente rifinitura. Possono avere una superficie liscia, o rugosa come una sabbia, così come le barre rivestite di resina epossidica, o possono anche avere una dentellatura, come quella delle barre d'acciaio ordinario. Uno dei vantaggi di questo tipo di rinforzo è che esso non conduce elettricità e pertanto può venir impiegato per calcestruzzi armati esposti a correnti parassite od a correnti indotte di Foucault, come nel caso degli impianti d'alluminio. Questo tipo di barre è assolutamente resistente alla corrosione. La reattività della fibra di vetro con la pasta di cemento non costituisce un problema, perché le fibre sono normalmente prodotte con vetro

resistente agli alcali e ciascun filamento è annegato in resina poliestere. Le barre d'acciaio rinforzate con fibre di vetro, in aggiunta al ridotto legame con il calcestruzzo, hanno anche un secondo inconveniente: non sono duttili. Diversamente dall'acciaio, la rottura si determina istantaneamente, senza alcuno sforzo plastico. Ciò rappresenta un grosso svantaggio per elementi strutturali, nei quali la duttilità si rende necessaria per assicurare sicurezza alla struttura.

Le barre d'acciaio rinforzate con fibre di vetro non possono neppure esser piegate ed è necessario ricorrere a speciali connessioni per la realizzazione di sagome complicate che talvolta si rendono necessarie. Pertanto, l'impiego alternato di tali barre nelle zone della struttura più esposta alla corrosione, e di barre d'acciaio ordinario, nelle zone meno esposte, può costituire un'interessante soluzione in considerazione del fattore costo (20).

In un attento esame dei vantaggi e degli svantaggi delle varie alternative idonee a combattere il fenomeno di corrosione dei calcestruzzi armati, non può esser dimenticato il possibile ricorso anche a calcestruzzi ad alta resistenza (20).

### **Conclusioni.**

Al fine di rallentare nei calcestruzzi armati la penetrazione di cloruri provenienti da fonti esterne, è buona norma produrre impasti a rapporto più basso possibile acqua/cemento. Esso costituisce il principale parametro che favorisce la penetrazione degli ioni. Un calcestruzzo prodotto con rapporto acqua/cemento fra 0.30 - 0.35 risulta infatti poco permeabile. È parimenti necessario curare appropriatamente gettata dell'impasto e durata della stagionatura del manufatto. È opportuno altresì favorire la formazione di monocloralluminati, i quali riducono la soglia di concentrazione di cloruri idonei a neutralizzare lo stato passivo dell'armatura, legandoli e sottraendoli al fenomeno di corrosione.

È anche molto utile ricorrere a cementi di miscela, grazie alla loro attitudine a ridurre la velocità di penetrazione degli ioni, per effetto di una differente conformazione della superficie dei pori.

È infine consigliabile valutare anche la possibilità di ricorrere a calcestruzzi ad alta resistenza e, in casi assolutamente particolari, in vista dei costi, ad acciai resistenti alla corrosione: inossidabili, galvanizzati, rivestiti di resine epossidiche, compositi.

**Bibliografia**

1. Monteiro P.J.M., Gjørv O.E., Mehta P.K. Microstructure of the steel-cement paste interface in the presence of chloride. *Cement Concrete Res.*, 15, 781-4 (1985).
2. Neville A. Chloride attack of reinforced concrete: an overview. *Materials and Structures*, 28, 63-70 (1995).
3. Sersale R. Carbonatazione dei calcestruzzi. *Rend. Acc. Sci. fis. mat. Napoli*, LXXVI (2009).
4. Zornoza E., Garcés P., Payà J., Climent M.A. Improvement of the chloride ingress resistance of OPC mortars by using spent cracking catalyst. *Cement Concrete Res.*, 39, 126-39 (2009).
5. Marcotte T.D. Characterization of chloride-induced corrosion products that form in steel-reinforced cementitious materials. PhD Thesis in Mechanical Engineering 2001. University of Waterloo (Canada).
6. Jaffer S.J., Hansson C.M. Chloride-induced corrosion products of steel in cracked-concrete subjected to different loading conditions. *Cement Concrete Res.*, 39, 115-25 (2009).
7. Sersale R. Sull'attività "pozzolanica" delle zeoliti. Nota I. Reattività della herschelite con soluzione d'idrossido di calcio. *Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli XXVII* (1960).
8. Collepari M., Marcialis A., Turriziani R. Penetration of chloride ions into cement pastes and concretes. *Journ. Amer. Ceramic Soc. Discussion and Notes*. 55, 10, 534-35 (1972).
9. Zhang M.H., Gjørv O.E. Effect of silica fume on pore structure and chloride diffusivity of low porosity cement paste interface. *Cement Concrete Res.*, 21, 6, 1006-14 (1991).
10. Gagné R., Aitcin P.C., Lamothe P. Chloride-ion permeability of different Concretes. *Proc. 6<sup>th</sup> Int. Conf. Durability Building Materials and Components*. Omiya (Japan), II. E & E.M. Spon. 1171-80. London (1993).
11. Aitcin P.C. Corrosion of reinforced steel. In: *High-performance concrete*. E & Spon. 487-89. London (1998).
12. Wheat H.G., Kasthurirangan J., Kitowski C.J. Behaviour of steel in simulated concrete solutions. In: *Mechanisms of Chemical Degradation of Cement-based Systems*. E & F.N. Spon, 143-50 (1997).
13. Lea's Chemistry of cement and concrete. Fourth Ed. P.C. Hewlett Ed. Elsevier p. 401 (2004).
14. Roy D.M., Kumar A., Rhodes J.P. Diffusion of chloride and cesium ions in Portland cement pastes and mortars containing slag and fly ash. In: Malhotra V.M. Ed., *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on fly ash, silica fume, slag, natural pozzolanas in concrete*. Madrid (1996). Amer. Concrete Inst., Special Report, 91, II, 1423-44.
15. Chatterji S. Transportation of ions through cement based materials. III. Experimental evidence for the basic equations and some important deductions. *Cement Concrete Res.* 24, 1229-36 (1994).
16. Kumar A. Roy D.M. Retardation of  $Cs^+$  and  $Cl^-$  diffusion using blended cement admixtures. *Journ. Amer. Ceramic Soc.*, 69, 356-60 (1986).
17. Byfors K. Influence of silica fume and fly ash on chloride diffusion and pH values in cement paste. *Cement Concrete Res.*, 17, 115-30 (1987).
18. L.c. a nota 13, pag. 550.
19. Wolsiefer J. T. Silica fume concrete: a solution to steel reinforcement corrosion in concrete. *Proc. 2<sup>nd</sup> Intern. Conf. Durability of Concrete*. Amer. Concrete Inst. S.P. 126, 527-58. Detroit (1991).
20. L.c. a nota 11, pag. 491.



**Parametri che influenzano l'“attività pozzolanica” delle aggiunte che parzialmente  
rimpiazzano il clinker di Portland.**

**Parameters affecting “pozzolanic activity” of additions partially replacing Portland clinker.**

Nota di Riccardo Sersale  
(Adunanza del dì 4 dicembre 2009)

**Riassunto.** Dopo una breve trattazione della genesi e della costituzione delle pozzolane e dei loro equivalenti zeolitizzati: i tufi vulcanici (zeolititi), si passa all'analisi dei parametri che influenzano la loro “attività pozzolanica”, puntualizzando quelli che la esaltano.

Si attribuisce tale “attività” al contenuto di vetro soffiato nelle pozzolane ed alla particolare struttura a pori e canali, più aperta e più disponibile all'attacco, negli equivalenti microcristallini: i tufi criptozeolitici.

Si sottolinea anche il possibile innalzamento della reattività dei tufi vulcanici mediante attivazione termica, un trattamento inefficace per le pozzolane, evidenziando altresì l'influenza del contenuto di zeolite, del rapporto Si/Al e del catione scambiabile, sulla reattività del minerale zeolitico diffuso nella massa di fondo dei tufi.

Si pone infine in risalto che, anche nei Paesi che dispongono di potenti giacimenti di entrambi le piroclastiti (incoerenti e litoidi), può convenire la produzione di cementi pozzolanici impiegando, come aggiunte attive, i tufi polverizzati, specie per la formulazione di calcestruzzi preparati con aggregati reattivi agli alcali.

**Parole chiave:** “Attività pozzolanica”. Piroclastiti incoerenti e litoidi.

**Summary.** After a short exposition of the genesis and composition of the pozzolanas and of their zeolitized counterparts: the volcanic tuffs (zeolitites), the definition of their “pozzolanic activity”, as well of the parameters improving it, has been pointed out.

Such an “activity” is attributable to the bubbled, amorphous glass of the pozzolanas and to the peculiar structure of the microcrystalline counterparts (hiddenzeolite tuffs), having a texture of pores and channels, more open and therefore more available to be attacked.

The possible improvement of volcanic tuffs reactivity through thermal activation, a methodology ineffective for pozzolanas, is emphasized, underlining the influence of the zeolite content, the Si/Al ratio and the easy with which cations are exchanged, on the reactivity of zeolitic mineral, present in the cementing matrix of the tuff.

Evidence is given too, that in Countries having huge deposits of pyroclastic rocks, both incoherent (pozzolanas), and lithic (tuffs), it might be proper to product pozzolanic cements using ground volcanic tuffs, particularly in the case of concretes prepared with alkali-reactive aggregates.

**Keywords:** “Pozzolanic activity”. Pyroclastic rocks incoherent and lithic.

**Premessa.**

L'esigenza di mitigare il riscaldamento del Pianeta e, nel contempo, disporre di cementi con migliorato comportamento tecnico: ridotto consumo d'energia, ridotto calore d'idratazione, ridotto degrado in ambiente marino e su terreni solfatici, incoraggia sempre più il “taglio” del clinker di Portland con aggiunte attive. La produzione di clinker di Portland è infatti responsabile del 5% delle emissioni di biossido di carbonio prodotto dal complesso delle attività antropiche, un gas considerato il più temibile per l'effetto serra. In Europa solo il 35% dei cementi prodotti è di tipo Portland classico e questo dato scende in Italia al 9% (1).

I cementi più compiutamente studiati sono quelli basati sull'attivazione dei materiali a comportamento “pozzolanico” con la calce (2), una pratica nota sin dai tempi della Roma antica (3). Nei Paesi con grande disponibilità di piroclastiti incoerenti (pozzolane naturali), come l'Italia, la Grecia, il Cile, il Marocco, ecc., esse vengono largamente usate nel “taglio” del clinker.

I loro equivalenti zeolitizzati (tufi vulcanici) trovano invece massima utilizzazione in Paesi come Cina ed Yugoslavia, dove grandi quantità di tufi zeolitici polverizzati vengono impiegati per il medesimo “taglio”.

Le ragioni di questa differente scelta, a parte le rispettive disponibilità, risiedono probabilmente nella convinzione che laddove abbondano anche prodotti incoerenti (Italia), la richiesta di energia di macinazione risulti più ridotta.

Un'attenta analisi pone però in luce che il vantaggio determinato dalla morfologia dell'aggiunta è più apparente che reale, poiché il consumo d'energia di macinazione non differisce granché per entrambi le piroclastiti, grazie alla particolare tessitura dei tufi zeolitici (4). Per la macinazione delle pozzolane o dei loro equivalenti zeolitizzati sono richiesti 8-10 Kwh/ton, in raffronto alle 30 Kwh/ton richiesta dalla macinazione del clinker.

Neppure il consumo d'energia per il processo d'essiccazione delle pozzolane o dei tufi risulta granché diverso: 200-250 kcal/kg (5).

L'acqua d'impasto, lievemente più alta per cementi che recano tufi zeolitici, non può inoltre rappresentare un fattore limitante del loro impiego, considerata la possibilità di superare questo svantaggio con l'impiego di additivi superfluidificanti (2),(6).

Considerato l'interesse dell'argomento, sembra opportuno analizzare compiutamente le caratteristiche composizionali, morfologiche e strutturali delle piroclastiti, ai fini di un'esatta definizione delle ricadute sulla reattività con la calce, per valutare le caratteristiche tecniche dei cementi recanti pozzolana o zeolite come aggiunta attiva, ed evidenziare se in Paesi come l'Italia, che dispongono di potenti depositi di pozzolane e dei loro equivalenti zeolitizzati, sia conveniente l'impiego di questi ultimi, specie per la produzione di cementi pozzolanici di qualità.

A questo proposito va ricordato che cementi di aggiunta contenenti gli equivalenti zeolitizzati delle pozzolane, risultano classificabili a pieno titolo come cementi pozzolanici, secondo la Norma italiana (7).

**Materiali incoerenti.**

Le pozzolane derivano da eruzioni vulcaniche a carattere esplosivo, che proiettano minute particelle di magma fuso nell'atmosfera (2), (8). La rapida diminuzione di pressione che interessa l'eruzione, provoca il rilascio dei gas originariamente disciolti nel magma liquido. Conseguentemente, ciascuna particella contiene numerose, microscopiche bollicine e condotti che generano una struttura microporosa. Tali particelle vanno contemporaneamente soggette ad un processo di tempra, responsabile dello stato vetroso. Eruzioni non esplosive producono solo ceneri vulcaniche, senza, o con scarsa, attività pozzolanica, poiché la tempra non è sufficientemente rapida per impedire la cristallizzazione del magma fuso.

La composizione chimica delle pozzolane varia entro ampi limiti. Silice ed allumina prevalgono sugli altri costituenti. Il contenuto d'alcali è piuttosto elevato, con picchi che possono superare il

10%. La perdita al fuoco, generalmente bassa nelle pozzolane napoletane, può salire in quelle romane (9).

Struttura e composizione mineralogica delle pozzolane napoletane sono abbastanza semplici. Costituente fondamentale è un vetro pomiceo, contenente sanidino e raramente inclusioni di plagioclasio e pirosseno. I vari cristalli sono cementati da una massa di fondo isotropa, costituita da un vetro profondamente alterato.

Una vera pozzolana è costituita essenzialmente da una modesta quantità di minerali cristallini (feldspati, leucite, augite, ecc.), dispersa in un'abbondante massa amorfa, nella maggior parte dei casi vetrosa, o tutt'al più sub-microcristallina, più o meno alterata dagli agenti atmosferici, porosa tanto da simulare un gelo, con un'ampia superficie interna. Accanto alla silice, contiene significative quantità di allumina solubile (8).

La selezione di una pozzolana può esser fatta in base al contenuto di fase vetrosa, mediante differenza fra tenore di silice e tenore di calce, determinabile con metodi convenzionali. Tale fase è infatti sostanzialmente costituita da silice ed allumina reattive, con  $F_2O_3$  ed altri ossidi come costituenti accessori e trascurabile quantità di CaO.

I materiali "pozzolanici" sono sostanze naturali od industriali, silicei o silico-alluminosi, od una loro combinazione. Fra questi, le pozzolane naturali rivestono un grosso interesse industriale, poiché contengono silice ed allumina facilmente solubilizzabili, ciò che è tipico delle strutture amorfe e, in particolare, dei vetri acidi. Per questo costituiscono i prodotti preferiti da utilizzare come aggiunte attive.

#### **Materiali litoidi.**

I depositi di pozzolane vulcaniche risultano spesso associati con formazioni compatte, di cui il tufo giallo napoletano costituisce un tipico esempio. Sono originate dall'azione di agenti atmosferici, mediante cementazione di particelle disciolte ad opera di processi diagenetici, provocati dall'azione di acque meteoriche e possono produrre zeolitizzazione od argillificazione (10). La prima migliora le proprietà "pozzolaniche", la seconda le riduce (11).

I prodotti vulcanici, per la maggior parte vetrosi, incoerenti, si accumulano nei differenti bacini sedimentari e costituiscono, nella maggior parte dei casi, la culla dei fenomeni di zeolitizzazione.

I vetri silicatici, per la loro più elevata energia libera, sono sommamente disponibili ad ogni tipo di reazione, soprattutto in mezzo umido. Per idratazione, solubilizzazione, idrolisi, possono pertanto dar luogo a fenomeni di zeolitizzazione, feldspatizzazione, argillificazione, responsabili della cementazione del materiale originario.

Il grado di trasformazione raggiunto dal deposito originario dipende dall'intensità delle azioni diagenetiche, così come dalla loro durata.

A zeolitizzazione avvenuta, i contenuti di silice, o di silice+allumina, risultano molto simili a quelli delle pozzolane piroclastiche. La perdita al fuoco è generalmente alta ed i costituenti accessori sono piuttosto variabili. La costituzione mineralogica dei tufi è più complessa (12), poiché il vetro pozzolanico si trasforma in minerali zeolitici, quali: cabasite, phillipsite, herschelite, a seguito di un processo di autometamorfismo (13). La Fig. I riporta il diagramma di diffrazione dei raggi X della massa di fondo del tufo giallo napoletano, dopo separazione ed arricchimento delle singole frazioni zeolitiche che costituiscono la massa di fondo (4).

Nel passaggio pozzolana-tufo, il ferro trivalente, i contenuti d'acqua e di alcali, crescono.

La trasformazione pozzolana flegrea-tufo giallo napoletano è stata riprodotta in laboratorio, sottoponendo la pozzolana di Bacoì ad un trattamento idrotermale (14). La composizione chimica non cambia granché, ma il vetro vulcanico si trasforma in minerali zeolitici, confermando una considerevole attitudine alla zeolitizzazione.

Velocità di trasformazione e tipo di minerale zeolitico dipendono dalle condizioni operative e dall'attivatore chimico impiegato.

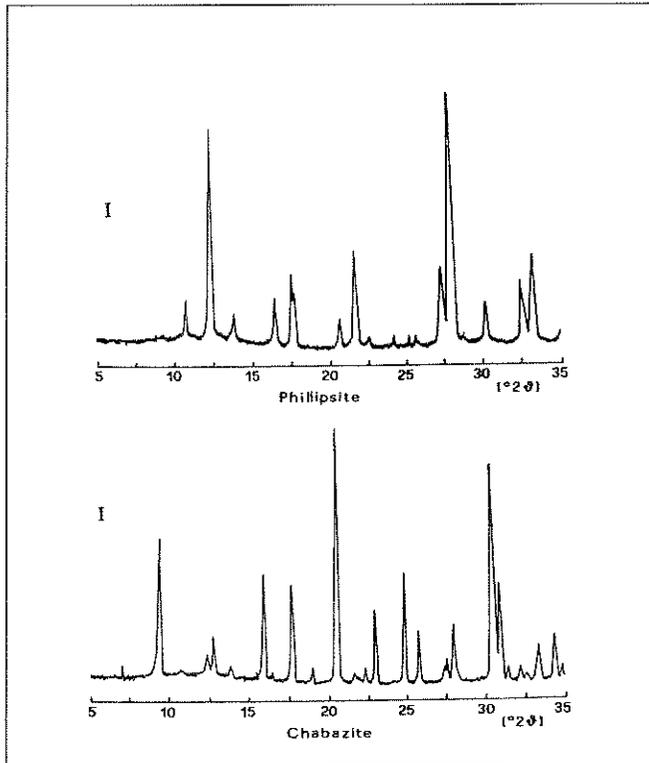


Fig.1 - Phillipsite e cabasite nella massa di fondo del tufo giallo napoletano.

### Attività “pozzolanica”.

L'attività pozzolanica, ossia la vocazione a reagire con l'idrossido di calcio, dipende dalla morfologia e dalla quantità di vetro o di zeoliti presenti. Un notevole contenuto di minerali delle argille abbassa la reattività.

Fino al XIX° secolo le miscele calce-pozzolana hanno fornito le uniche malte idrauliche idonee ad indurire sott'acqua ed a resistere all'azione di acque aggressive, quella di mare compresa. A causa di una lenta velocità d'indurimento, tali miscele sono state gradualmente sostituite dai cementi pozzolanici.

Il sistema calce-pozzolana-acqua è in qualunque caso più semplice di quello clinker di Portland-pozzolana-acqua, sicché il suo studio approfondito può aiutare ad elaborare la corretta interpretazione delle proprietà e del comportamento dei cementi contenenti pozzolane o zeoliti come parziale rimpiazzo del clinker.

Le pozzolane non induriscono di per se stesse se mescolate con acqua. Se finemente macinate, esse reagiscono a temperatura ambiente con l'idrossido di calcio, in presenza d'acqua, per formare silicati ed alluminati di calcio, con conseguente sviluppo di resistenza meccanica. Si tratta pertanto di una reazione della calce sui prodotti formati per attacco alcalino dei silicati acidi, che origina composti simili a quelli che si formano per idratazione dei cementi idraulici (15).

Nel caso di strutture cristalline, microporose, di tipo zeolitico, la reattività, che talvolta è anche superiore a quella degli equivalenti vetrosi (8), deve ragionevolmente esser attribuita alla struttura a pori, più aperta e più disponibile all'attacco da parte della calce. In effetti, tali pori favoriscono la penetrazione degli agenti chimici che attaccano la struttura e la demoliscono, liberando silice ed

allumina reattive ed alcali. Si viene a formare un mezzo alcalino, nel quale i minerali zeolitici, così come il vetro pozzolanico, vanno soggetti ad un processo d'idrolisi, che promuove il passaggio in soluzione di ioni silicato ed alluminato. In presenza di ioni calcio o magnesio, si formano fasi a bassissimo prodotto di solubilità, quali silicati ed alluminati. La loro precipitazione favorisce il passaggio in soluzione di altri ioni silicato ed alluminato, sicché il processo d'idrolisi può continuare, diversamente da quando l'agente d'attacco è solo l'acqua.

Ricerche sulla cinetica e sul meccanismo di reazione dei tufi vulcanici polverizzati, posti a reagire con la calce in mezzo acquoso ed alla temperatura di 65°C (16), mostrerebbero che l'attacco della soluzione satura di calce provoca la dissoluzione superficiale dei granelli sin dai primi istanti della reazione, con formazione locale molto rapida di gel di C-S-H. La dissoluzione del tufo continuerebbe in corrispondenza della separazione C-S-H solido/superficie del granello, in un mezzo favorevole a raggiungere livelli di saturazione. In seguito, l'evoluzione del silicato gelatinoso verso forme a più alto grado di cristallinità, sarebbe regolata da un processo di diffusione controllata (2).

Il termine "attività pozzolanica" comprende tutte le reazioni che decorrono fra i costituenti attivi delle pozzolane, calce ed acqua. La definizione, benché approssimata, è tuttavia accettabile dal punto di vista tecnico e pratico. Nonostante la difficoltà di seguire l'evoluzione delle fasi attive delle pozzolane nel corso del processo d'idratazione, il decorso della reazione pozzolanica è generalmente valutata in termini di riduzione della calce libera nel sistema, o dell'aumento della somma silice+allumina solubili in acido mediante attacco Florentin (17). Può anche esser valutata in base alle proprietà meccaniche: resistenza a compressione di malte, preparate per miscelazione di pozzolana con cemento (6).

Tale termine include sia la quantità massima di calce che può combinarsi con una pozzolana, sia la velocità con cui la combinazione avviene. Entrambi tali fattori dipendono dalla natura delle pozzolane e, più precisamente, dalla qualità e quantità delle fasi attive.

L'eterogeneità delle pozzolane ed i complessi fenomeni che presiedono all'idratazione, non consentono di definire un modello di attività pozzolanica, ma permettono solo di individuare l'andamento generale della reazione. In eccesso d'acqua, ad esempio, la quantità di calce che si combina può considerevolmente variare a seconda del tipo delle pozzolane. Dopo 180 giorni di reazione, le pozzolane possono combinarsi con 45-75% di calce in peso. Nelle paste tale combinazione è minore, perché la massa indurita impedisce di raggiungere condizioni di equilibrio (18).

È opinione generale che la quantità totale di calce combinata dipenda essenzialmente dai parametri seguenti:

- natura delle fasi attive;
- loro contenuto nella pozzolana;
- contenuto di silice;
- rapporto calce/pozzolana della miscela;
- durata della stagionatura.

La velocità di combinazione dipende: dalla superficie specifica (BET) della pozzolana, dal rapporto di miscela acqua/solido, dalla temperatura, che aumenta la velocità di reazione della pozzolana. Maggiore il contenuto d'acqua della miscela, maggiore la velocità di combinazione della calce, ciò che rende la reazione pozzolanica più lenta in pasta, che in dispersione. La reazione in pasta risulta infatti ancora incompleta dopo parecchi anni.

È evidente che a parità di altre proprietà, maggiore la quantità di calce combinata, maggiore il contenuto di fasi attive e minore il contenuto d'inerti o di fasi cristalline (quarzo, sanidino, mullite, magnetite, ecc.).

Il quantitativo di calce combinata si collega al contenuto di silice nelle fasi attive che, nel vetro vulcanico (18) e nelle ceneri volanti (19), variano fra 45 e 75%, ma raggiunge e talvolta supera il 95% nel fumo di silice amorfo (20). In aggiunta al tenore di silice, altri fattori chimici e strutturali

giocano un importante ruolo nel promuovere l'attività pozzolanica. Il vetro delle ceneri volanti, ad esempio, può avere composizione e struttura differente e determinare differenti gradi di reattività.

La quantità di calce combinabile aumenta, entro certi limiti, all'aumentare del rapporto calce/pozzolana. Tale quantità dipende altresì dalla durata della stagionatura, ma, da una pozzolana all'altra, la velocità di combinazione varia largamente.

L'attività a breve termine dipende essenzialmente dalla superficie specifica (BET), mentre quella a lungo termine sembra riferibile più ragionevolmente alla composizione chimica e mineralogica della pozzolana.

La velocità di reazione dei materiali “pozzolanici” si ritiene proporzionale al quadrato della superficie specifica (21). Il suo ruolo risalta anche da paste contenenti idrossido di calcio e da due campioni di fumo di silice, aventi rispettivamente superficie specifica pari a 200 e 20 m<sup>2</sup>/g.

Entro un giorno l'idrossido viene completamente consumato dalla silice più fine, mentre, la silice più grossolana, dopo ventotto giorni, reca ancora una parte di calce non combinata (22).

Anche altri parametri influenzano la reazione pozzolanica. Ad esempio, l'aggiunta di gesso al sistema pozzolana-calce-acqua in eccesso, migliora la velocità di combinazione (23).

La reazione di una miscela calce-pozzolana a breve termine è probabilmente controllata dalla diffusione, mentre la permeabilità dello strato superficiale che circonda i grani determina il prosieguo della reazione. A termini più lunghi, dissoluzione e precipitazione, piuttosto che diffusione, presiedono alla reazione (2).

Contenuto di CaO ed alcalinità decrescono progressivamente nel corso dei ventotto giorni.

Ciò indica che la reazione pozzolanica consuma progressivamente la calce in eccesso dalla soluzione dei pori.

La reattività delle piroclastiti litoidi (i tufi) è determinata dalla natura e dal contenuto del minerale zeolitico diffuso nella massa di fondo, dalla frazione amorfa, dal tenore di pomici, dalla presenza, maggiore o minore, di fasi cristalline stabili. Grani più fini o maggiore superficie specifica ed area superficiale esterna, parametri che non hanno più influenza dopo qualche giorno, innalzano solo l'attività pozzolanica a brevi termini. Essa è anche influenzata, in larga misura, dal catione scambiabile contenuto nella zeolite e dalla sua facilità di scambio ionico (24). La differenza di reattività può esser posta in relazione all'influenza di tale catione sul pH della soluzione dei pori della pasta di cemento.

A più lunghi periodi, la reazione pozzolanica è controllata da altri fattori, contenuto di silice ed allumina, principalmente (6). Campioni di zeoliti a più alto rapporto Si/Al reagiscono più velocemente e campioni ricchi di silicio reagiscono più velocemente di quelli ricchi d'alluminio.

### **Prodotti di reazione.**

La reazione calce-pozzolana, un attacco alcalino dei silicati acidi, produce gli stessi composti di quelli che si rilevano per idratazione del cemento Portland (15).

Le pozzolane naturali, poste a reagire in soluzione satura o quasi satura di calce, formano silicato idrato (C-S-H) ed alluminati esagonali. In eccesso d'acqua – che accelera il raggiungimento dello stato finale di reazione – la combinazione della calce viene accelerata dall'aggiunta di gesso (23). Accanto all'alluminato di calcio esagonale ed al silicato di calcio idrato, sono riconoscibili: gehlenite idrata e, dopo lungo periodo, idrogranati. In presenza di gesso, anche ettringite.

La natura dei prodotti d'idratazione dipende anche dalla composizione della pozzolana.

Il rapporto calcio/silicio del C-S-H è variabile e sembra dipendere: dal tipo di pozzolana, dal tempo e dalla temperatura di stagionatura, dal rapporto calce/pozzolana, nonché dal metodo d'analisi adottato.

### **Vantaggi dell'impiego di tufi vulcanici polverizzati, in sostituzione delle pozzolane nella produzione di cementi pozzolanici.**

Premesso, come già sottolineato, che la convenienza determinata dalla morfologia del prodotto incoerente è più apparente che reale, e che la richiesta d'acqua d'impasto, lievemente superiore, è superabile con l'impiego di fluidificanti, conviene analizzare i vantaggi del ricorso a tufi vulcanici litoidi, dopo conveniente macinazione, quali aggiunte attive al clinker, nella produzione di cementi pozzolanici.

Le prove di resistenza a compressione su malta, preparata miscelando al clinker sia tufo giallo napoletano, che pozzolana flegrea (4), a pari grado di lavorabilità e con dosaggio di clinker pari a  $300 \text{ Kg/m}^3$ , hanno posto in evidenza che, a pari contenuto d'aggiunta (10-40%, macinata fino a lasciare un residuo del 13% su setaccio da 32 micron) e di modalità di stagionatura, i valori risultano sensibilmente più alti, particolarmente alle lunghe stagionature, per le malte di cemento pozzolanico preparate con aggiunta di tufo, in linea con la più alta reattività dei minerali zeolitici posta in luce dalle curve cinetiche (19).

Tali cementi abbattano anche più compiutamente l'espansione che accompagna la reazione degli alcali con alcuni costituenti silicei, che talvolta accompagnano gli aggregati per calcestruzzo.

Il silicato di calcio idrato gelatinoso (C-S-H) che abbondantemente si neoforma, ha infatti attitudine ad inglobare sensibili quantità di alcali, sottraendoli alla reazione con aggregati silicei reattivi. Può pertanto tranquillamente esser superato il limite di 0,6%  $\text{Na}_2\text{O}$  eq., raccomandato dalla Norma ASTM C 441-81 quale contenuto di alcali, nei cementi destinati alla preparazione di calcestruzzi con aggregati reattivi ad essi. L'abbattimento può anche venire vieppiù esaltato mediante un preventivo trattamento del tufo a  $600^\circ\text{C}$  per un'ora, un trattamento completamente inefficace per l'equivalente pozzolana.

Tale abbattimento può ragionevolmente addebitarsi ad un collasso della struttura a pori e canali della zeolite, che cede il passo ad un solido amorfo, ad ampia area superficiale, memore della peculiare struttura del progenitore.

### **Conclusioni.**

Da quanto finora esposto risulta che non mancano vantaggi nella produzione di cementi pozzolanici che recano come aggiunta attiva gli equivalenti zeolitizzati delle pozzolane (zeolititi), convenientemente macinati. Tali vantaggi, che ovviamente dipendono dal tipo e quantitativo di minerale zeolitico diffuso nella matrice, riguardano, in particolare, sia la migliorata resistenza meccanica e la possibilità di innalzarla con un breve trattamento termico di attivazione, sia la più alta resistenza all'alcali-reazione.

È imperativo naturalmente selezionare la zeolite dopo una compiuta caratterizzazione chimica, fisica e mineralogica, poiché un ruolo determinante, ai fini della sua attività "pozzolanica" e della risultante produzione di un cemento pozzolanico di qualità, è giocato sia dall'alto rapporto Si/Al, che dal contenuto di catione scambiabile.

### **Bibliografia.**

1. Sersale R. Il ruolo dei prodotti cementizi supplementari sull'abbattimento dell' "effetto serra". Atti Accad. Pontaniana, Napoli, LIII, 69-73 (2004).
2. Sersale R. Structure et caracterisation des pouzolanes et des cendres volantes. 7è ICCI. I. Rapport Principaux. IV-1/3-IV 1/21. Paris (1980).
3. Sersale R. La storia della calce dall'antichità ai nostri giorni. Proc. Intern. Lime Congr. Lime Assoc., 5-22. Roma (1990).

4. Sersale R. Zeolite tuff as a pozzolanic addition in the manufacture of blended cements. In: *Natural Zeolites '93*. D.W. Ming, F.A. Mumpton Eds. ICNZ. New York, 603-612 (1995).
5. Sersale R., Frigione G. Blended cements: an effective utilization of natural zeolites. In: *Volcanoclastic rocks of Campania*. Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli. Special Issue. M. De Gennaro Ed., Napoli (1987).
6. Fragoulis D., Chaniotakis É., Stamatakis M.G. Zeolitic tuffs of Kimolos island, Aegean Sea, Greece and their industrial potential. *Cement Concrete Res.* 27, 889-905 (1987).
7. ISO Recommendation R. 679. Marzo (1968).
8. Sersale R. Genesi e costituzione del tufo giallo napoletano. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli*, XXV, 181-207 (1958).
9. *Lea's Chemistry of Cement and Concrete*. Fourth Ed. P.C. Hewlett Ed., 472-478. Oxford (2004).
10. Sersale R. Indagini intorno alla genesi del “tufo giallo napoletano”. *Annali di Chimica*. 49. Roma (1959).
11. Sersale R. Problemi di mineralogia applicata. Costituzione e reattività di tufi, di pozzolane e di ceneri della regione vulcanica dei Colli Albani. *Rend. XVIII Congr. Soc. Mineralogica It.*, 215-258 (1962).
12. Sersale R. Ricerche sperimentali sulla costituzione, sulla genesi e sul comportamento chimico dei tufi vulcanici. *Rend. Soc. Mineralogica It.*, XVII, 499-536 (1961).
13. Scherillo A. Petrografia chimica dei tufi flegrei. Nota II. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli*, XXII, 4, 345-371 (1955).
14. Sersale R. Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale. Note I e II. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli*, XXVI, 154-166 (1959); XXVII, 317-366 (1961).
15. Sersale R., Giordano Orsini P., Aiello R. Sulla costituzione dei prodotti di reazione di talune zeoliti e piroclastiti con soluzione satura di calce. Nota I. Microscopia elettronica dei cristalli di habitus esagonale. *Rend. Accad. Naz. Lincei. Classe Sc. Fis, mat. e nat.*, XXXIV, 5, 537 (1963).
16. Drzaj B., Hocevar S., Šlokan M., Zajc A. Kinetic and reaction mechanism in the system zeolitic tuff-CaO-H<sub>2</sub>O at elevated temperature. *Cement Concrete Res.*, 8, 6, 711-720 (1978).
17. Vittori C., Cereseto A. Solubilizzazione progressiva della silice e R<sub>2</sub> O<sub>3</sub> dei materiali pozzolanici sotto l'azione della calce per valutazione del valore idraulico dei materiali stessi. *Chimica e Industr.* 17, 646-650 (1935).
18. Massazza F., Costa U. Factors determining the development of mechanical strength in lime-pozzolana pastes. *Proc. XXII Conf. Silicate Industr. and Science*. Budapest, June 6-11, I, 537-552 (1977).
19. Sersale R. Advances in Portland and blended cements. *Proc. 9<sup>th</sup> ICCC.*, I, 261-302. New Dehli (1992).
20. Decreto Ministeriale 3 giugno 1968. Norme sui requisiti di accettazione e modalità di prove dei cementi. *Gazzetta Ufficiale* n. 180 (1968).
21. Takemoto K., Uchikawa H. Hydratation des ciments pouzzolaniques. *7<sup>e</sup> ICCC*. I, IV- 2/1-21. Paris (1980).
22. Zhao-qi Wu, Young JF. The hydration of tricalcium silicate in the presence of colloidal silica. *Journ. Mat. Sci.*, 79, 3477-3486 (1984).
23. Malquori G., Spadano A. Azione combinata del gesso e della calce sui materiali pozzolanici. *La Ricerca Scientifica*, 185-191 (1936).
24. Mertens G., Snellings R., Van Balen K., Bicer-Simsir B., Verlooy P., Elsen J. Pozzolanic reactions of common natural zeolites with lime and parameters affecting their reactivity. *Cement Concrete Res.* , 39, 233-240 (2009).

# **L'Osservatorio Meteorologico di *S. Marcellino* - Napoli Centro: i dati dell'anno 2009**

Nota di A. Mazzarella, R. Di Cristo, R. Viola

Presentata dal Socio C. Sbordone  
(Adunanza del gennaio 2010)

Osservatorio Meteorologico  
Dipartimento di Scienze della Terra  
Largo S. Marcellino, 10 – 80138 NAPOLI  
Università degli Studi di Napoli *Federico II*  
Tel. 081.2538347 Fax 081.5522756  
e-mail: [adriano.mazzarella@unina.it](mailto:adriano.mazzarella@unina.it)

**INDICE DELLE SEZIONI**

	Pag.
<i>L'Osservatorio Meteorologico della Federico II</i>	245
<i>Rapporto Meteorologico per l'anno 2009</i>	246
<i>Legenda</i>	247
<i>Medie orarie</i>	
<i>Gennaio</i>	248
<i>Febbraio</i>	249
<i>Marzo</i>	250
<i>Aprile</i>	251
<i>Maggio</i>	252
<i>Giugno</i>	253
<i>Luglio</i>	254
<i>Agosto</i>	255
<i>Settembre</i>	256
<i>Ottobre</i>	257
<i>Novembre</i>	258
<i>Dicembre</i>	259
<i>Medie giornaliere</i>	
<i>Gennaio</i>	260
<i>Febbraio</i>	262
<i>Marzo</i>	264
<i>Aprile</i>	266
<i>Maggio</i>	268
<i>Giugno</i>	270
<i>Luglio</i>	272
<i>Agosto</i>	274
<i>Settembre</i>	276
<i>Ottobre</i>	278
<i>Novembre</i>	280
<i>Dicembre</i>	282
<i>Medie mensili</i>	284
<i>Distribuzione mensile per soglie delle piogge giornaliere e delle temperature minime e massime</i>	286

**L'Osservatorio Meteorologico di  
"San Marcellino"  
dell'Università degli Studi di Napoli *Federico II***

I dati meteo sono attualmente rilevati da una centralina automatica sita sulla torretta dell'edificio di S. Marcellino (lat. 40°50' 48" N; long. 14°15'31" E; quota 50 m slm), sede attuale del Dipartimento di Scienze della Terra, a meno di 50 m dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

La stazione gestisce i seguenti sensori SIAP+MICROS :

- temperatura dell'aria (°C)
- pressione atmosferica (hPa)
- umidità relativa (%)
- velocità del vento (m/s)
- direzione del vento (°Nord)
- precipitazione (mm)
- radiazione solare globale ( $W/m^2$ )
- radiazione UVb ( $W/m^2$ )

I dati sono acquisiti con cadenza di 10 minuti ed i valori, fatta eccezione per la pioggia che viene registrata come cumulata, sono quelli istantanei; i dati giornalieri di radiazione globale ed UVb sono mediati sull'intero arco delle 24 ore.

Sono stati analizzati anche i dati giornalieri della temperatura del mare (°C) misurati nel golfo di Napoli (lat. 40°50'23"; long. 14° 16'09") presso il molo del Carmine, gentilmente forniti dall'Istituto Superiore per la Protezione e la Ricerca Ambientale (ISPRA).

E' possibile accedere via web alla consultazione dei dati rilevati in tempo reale all'indirizzo:

**<http://www.metco.unina.it>**

## RAPPORTO METEOROLOGICO DELL'ANNO 2009

Il bollettino è così organizzato:

- Una catalogazione dei dati e dei relativi grafici a livello orario, nell'arco delle 24 ore, per ogni mese, con l'indicazione dei valori estremi registrati e, a livello giornaliero e mensile, nell'arco dei 12 mesi.
- Un'analisi mensile di tutti i parametri meteo relativa all'anno in corso.
- La direzione del vento è calcolata come moda sia a scala di 10 minuti per i grafici orari che a scala giornaliera per i grafici mensili. E' considerata variabile (var.) quando la direzione non è stata registrata su uno stesso quadrante per più di 8 ore.

Dall'analisi di tutti i parametri meteo dell'anno 2009 emerge quanto segue:

- La pressione atmosferica media mensile oscilla fra 1003.9 hPa di dicembre e 1012.2 hPa di maggio, con una media annua di 1008.7 hPa, con un minimo assoluto di 973.2 hPa registrato il 5 marzo alle ore 5.10 e con un massimo assoluto di 1026.5 hPa registrato il 20 novembre alle ore 20.50.
- La temperatura dell'aria media mensile oscilla fra 10.2°C di febbraio e i 27.9°C di agosto, con una media annua di 18.4°C, con un minimo assoluto di 2.2°C registrato il 19 febbraio alle ore 3.10 e con un massimo assoluto di 35.4°C registrato il 20 agosto alle ore 15.00.
- L'umidità relativa media mensile oscilla fra 62.6% di agosto-settembre ed il 75.9% di novembre, con una media annua di 67.5%, con un minimo assoluto di 19.3% registrato il 25 marzo alle ore 13.00 e con un massimo assoluto di 95.5% registrato il 21 giugno alle ore 6.40.
- La radiazione solare globale media mensile oscilla fra 72.7 W/m<sup>2</sup> di gennaio e 311.7 W/m<sup>2</sup> di luglio, con una media annua di 187.3 W/m<sup>2</sup> e con un massimo assoluto di 1063.8 W/m<sup>2</sup> registrato il 24 giugno alle ore 10.00.
- La radiazione solare UVb media mensile oscilla fra 0.074 W/m<sup>2</sup> di gennaio e 0.606 W/m<sup>2</sup> di luglio, con una media annua di 0.301 W/m<sup>2</sup> e con un massimo assoluto di 1063.8 W/m<sup>2</sup> registrato il 24 giugno alle ore 10.00.
- L'intensità media mensile del vento oscilla fra 1.3 m/s di marzo e 2.4 m/s di settembre, con una media annua di 1.9 m/s e con la raffica più intensa di 23.1 m/s registrata il 21 giugno alle ore 3.30.
- La direzione del vento presenta una moda di 0° (da Nord) nei mesi di gennaio, settembre, ottobre, novembre, dicembre, di 180° (da Sud) nei mesi di marzo, aprile, maggio, luglio, agosto e di 45° (da Nord Est) nel mese di febbraio..
- La pioggia presenta un valore cumulato annuale di 1219.3 mm, con un massimo mensile di 320.1 mm a gennaio e con il giorno più piovoso registrato il 3 gennaio con 62.2 mm.
- La temperatura del mare media mensile oscilla fra 14.6°C di gennaio e 25.8°C di agosto con una media annua di 19.2°C.

## Legenda:

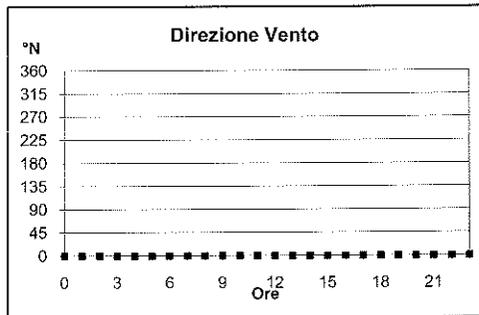
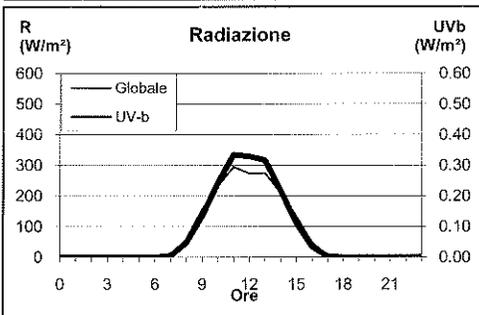
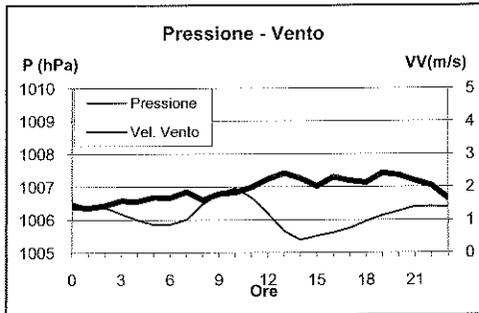
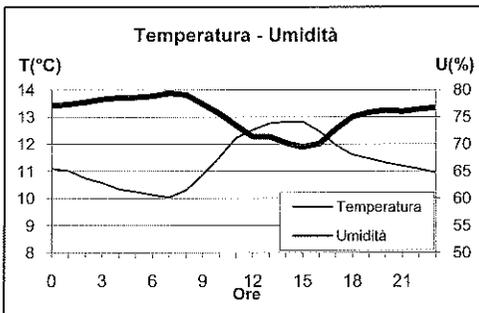
VV	= velocità del vento (m/s)
DV	= direzione di provenienza del vento (°N)
T	= temperatura (°C)
P	= pressione atmosferica (hPa)
U	= umidità relativa (%)
R	= radiazione solare totale (W/m <sup>2</sup> )
P <sub>g</sub>	= pioggia giornaliera (mm)
UV <sub>b</sub>	= radiazione ultravioletta (W/m <sup>2</sup> )
T <sub>max</sub>	= temperatura massima (°C)
T <sub>min</sub>	= temperatura minima (°C)
P <sub>max</sub>	= pressione atmosferica massima (hPa)
P <sub>min</sub>	= pressione atmosferica minima (hPa)
R <sub>max</sub>	= radiazione solare totale massima (W/m <sup>2</sup> )
U <sub>max</sub>	= umidità relativa massima (%)
U <sub>min</sub>	= umidità relativa minima (%)
VV <sub>max</sub>	= velocità massima del vento (m/s)
UV <sub>bmax</sub>	= radiazione ultravioletta massima (W/m <sup>2</sup> )
T <sub>mare</sub>	= temperatura del mare (°C)
var.	= direzione variabile del vento

N.B. L'assenza del dato indica sensore fuori uso

**GENNAIO 2009**

(medie orarie)

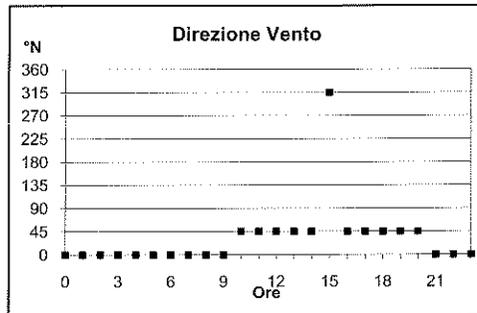
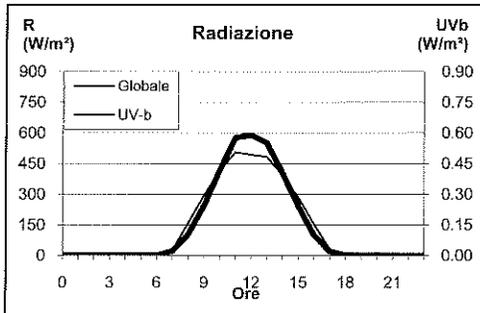
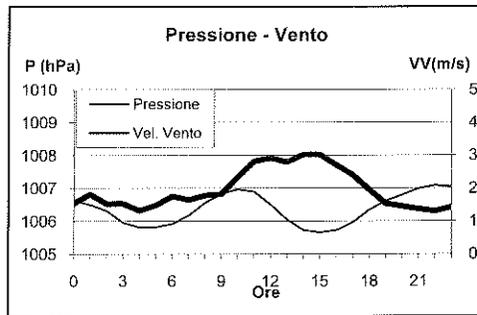
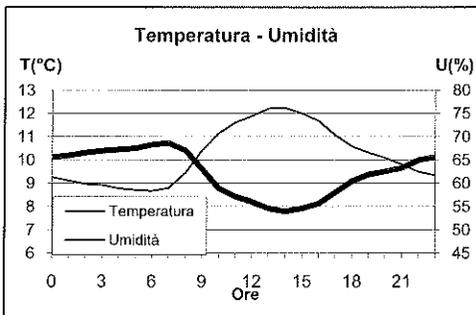
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	11.1	77.1	3.5	0.0	1.4	0.000	1006.5
1	11.0	77.3	3.5	0.0	1.4	0.000	1006.4
2	10.7	77.7	3.6	0.0	1.4	0.000	1006.4
3	10.6	78.3	3.5	0.0	1.6	0.000	1006.2
4	10.3	78.5	3.6	0.0	1.6	0.000	1006.0
5	10.3	78.6	3.5	0.0	1.7	0.000	1005.9
6	10.1	78.9	3.5	0.0	1.7	0.000	1005.9
7	10.0	79.4	5.0	0.0	1.8	0.005	1006.0
8	10.3	79.1	59.6	0.0	1.6	0.047	1006.5
9	10.9	77.4	157.1	0.0	1.8	0.136	1006.8
10	11.5	75.6	232.3	0.0	1.8	0.243	1007.0
11	12.2	73.5	294.6	0.0	2.0	0.335	1006.7
12	12.5	71.4	272.8	0.0	2.2	0.329	1006.2
13	12.8	71.4	274.6	0.0	2.4	0.316	1005.7
14	12.8	70.2	210.7	0.0	2.3	0.218	1005.4
15	12.8	69.4	133.4	0.0	2.0	0.111	1005.5
16	12.5	70.1	48.6	0.0	2.3	0.034	1005.6
17	12.0	72.8	4.4	0.0	2.2	0.002	1005.7
18	11.6	75.0	3.4	0.0	2.1	0.000	1006.0
19	11.5	75.8	3.4	0.0	2.4	0.000	1006.1
20	11.3	76.3	3.4	0.0	2.4	0.000	1006.3
21	11.2	76.0	3.4	0.0	2.2	0.000	1006.4
22	11.1	76.4	3.4	0.0	2.0	0.000	1006.4
23	10.9	76.7	3.4	0.0	1.6	0.000	1006.4



**FEBBRAIO 2009**

(medie orarie)

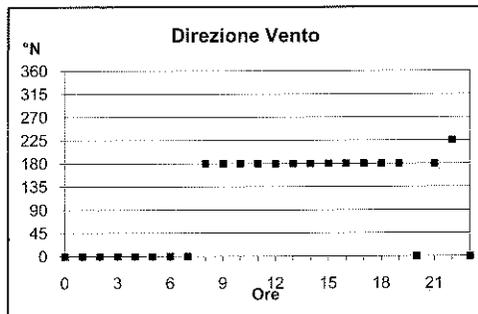
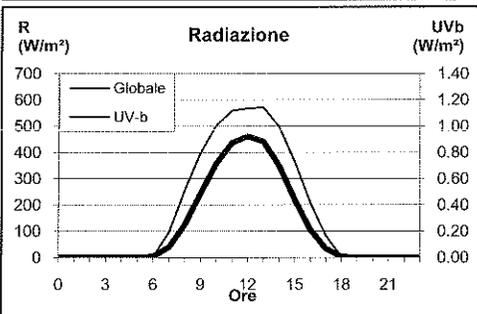
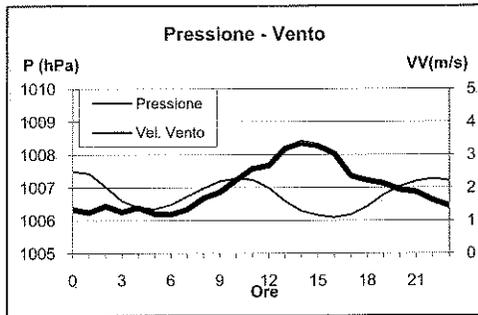
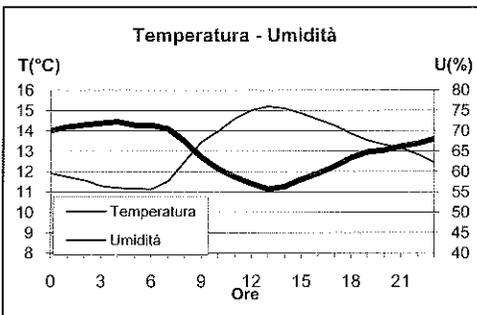
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	9.2	65.6	0.0	0.0	1.5	0.000	1006.6
1	9.1	66.0	0.0	0.0	1.8	0.000	1006.5
2	9.0	66.5	0.0	0.0	1.5	0.000	1006.3
3	8.9	66.9	0.0	0.0	1.5	0.000	1006.0
4	8.8	67.2	0.0	0.0	1.3	0.000	1005.8
5	8.7	67.5	0.0	0.0	1.5	0.000	1005.8
6	8.7	68.2	0.0	0.0	1.8	0.000	1005.9
7	8.8	68.7	25.4	0.0	1.6	0.021	1006.2
8	9.5	67.0	158.8	0.0	1.8	0.103	1006.6
9	10.4	63.1	295.4	0.0	1.8	0.246	1006.8
10	11.2	58.9	414.7	45.0	2.3	0.418	1007.0
11	11.6	57.2	505.4	45.0	2.8	0.576	1006.9
12	11.9	56.0	492.4	45.0	2.9	0.589	1006.5
13	12.2	54.6	481.9	45.0	2.8	0.551	1006.1
14	12.2	54.0	392.5	45.0	3.0	0.404	1005.7
15	12.0	54.6	282.7	315.0	3.0	0.241	1005.7
16	11.7	55.7	152.3	45.0	2.7	0.099	1005.7
17	11.1	58.0	30.0	45.0	2.4	0.020	1006.0
18	10.6	60.4	0.0	45.0	1.9	0.000	1006.3
19	10.3	61.9	0.0	45.0	1.5	0.000	1006.6
20	10.1	62.6	0.1	45.0	1.4	0.000	1006.8
21	9.8	63.3	0.0	0.0	1.4	0.000	1007.0
22	9.5	65.0	0.0	0.0	1.3	0.000	1007.1
23	9.3	65.6	0.0	0.0	1.4	0.000	1007.0



**MARZO 2009**

(medie orarie)

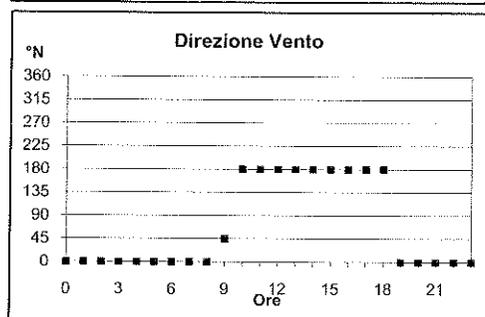
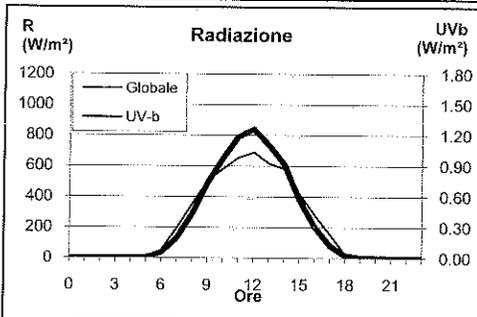
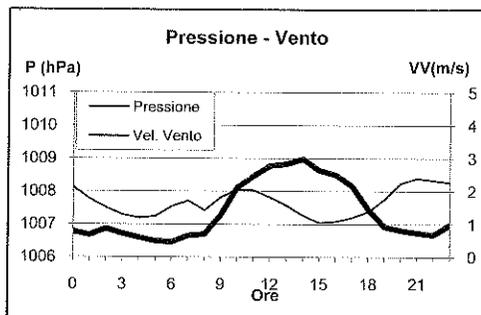
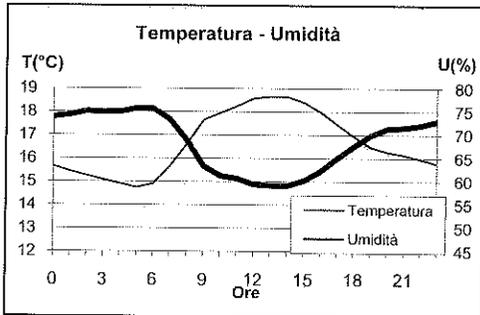
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	11.9	70.1	0.0	0.0	1.3	0.000	1007.5
1	11.7	71.0	0.0	0.0	1.2	0.000	1007.4
2	11.6	71.5	0.0	0.0	1.4	0.000	1007.0
3	11.3	71.9	0.2	0.0	1.3	0.000	1006.6
4	11.2	72.2	0.0	0.0	1.4	0.000	1006.4
5	11.2	71.4	0.0	0.0	1.2	0.000	1006.3
6	11.1	71.4	3.4	0.0	1.2	0.008	1006.5
7	11.5	70.5	95.2	0.0	1.3	0.078	1006.7
8	12.5	67.4	255.9	180.0	1.7	0.248	1007.0
9	13.5	63.5	398.0	180.0	1.9	0.488	1007.2
10	14.0	60.8	502.7	180.0	2.2	0.715	1007.3
11	14.6	58.7	559.0	180.0	2.6	0.872	1007.0
12	15.0	57.1	567.6	180.0	2.7	0.921	1007.0
13	15.2	55.7	571.4	180.0	3.2	0.882	1006.6
14	15.1	56.4	497.8	180.0	3.4	0.699	1006.3
15	14.9	58.1	364.6	180.0	3.3	0.438	1006.2
16	14.6	59.5	208.8	180.0	3.0	0.212	1006.1
17	14.3	61.3	82.5	180.0	2.4	0.066	1006.2
18	13.9	63.4	3.1	180.0	2.2	0.006	1006.4
19	13.5	64.9	0.1	180.0	2.1	0.000	1006.8
20	13.3	65.2	0.0	0.0	1.9	0.000	1007.0
21	13.2	66.3	0.3	180.0	1.9	0.000	1007.2
22	12.8	66.9	0.0	225.0	1.6	0.000	1007.3
23	12.5	68.0	0.0	0.0	1.4	0.000	1007.2



**APRILE 2009**

(medie orarie)

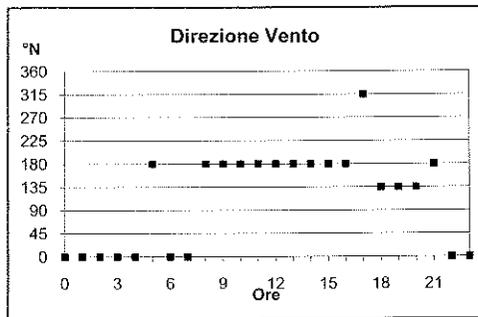
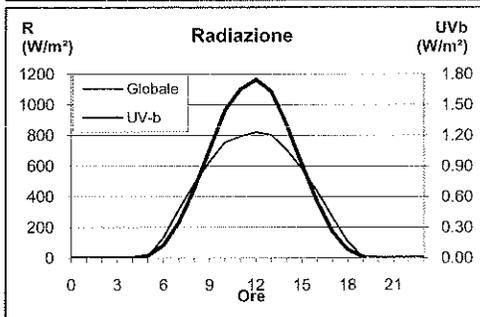
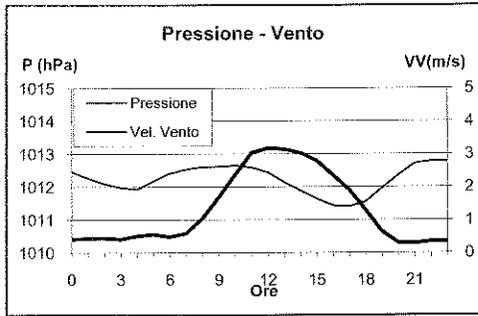
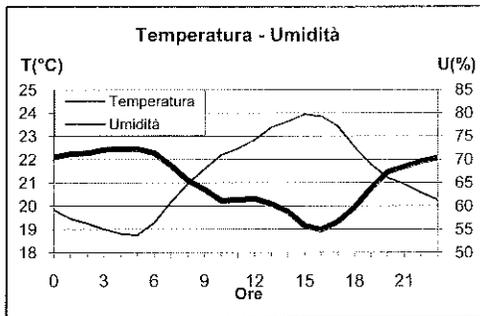
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	15.7	73.8	0.0	0.0	0.8	0.000	1008.1
1	15.4	74.3	0.0	0.0	0.7	0.000	1007.8
2	15.3	75.1	0.0	0.0	0.9	0.000	1007.5
3	15.1	74.9	0.0	0.0	0.7	0.000	1007.3
4	14.9	74.9	0.0	0.0	0.6	0.000	1007.2
5	14.7	75.7	0.1	0.0	0.5	0.004	1007.2
6	14.9	75.6	52.2	0.0	0.5	0.051	1007.5
7	15.7	73.3	193.4	0.0	0.6	0.187	1007.7
8	16.6	68.9	350.2	0.0	0.7	0.428	1007.4
9	17.7	63.3	502.4	45.0	1.3	0.732	1007.8
10	17.9	61.3	578.9	180.0	2.1	0.972	1008.1
11	18.2	60.7	653.6	180.0	2.5	1.183	1008.0
12	18.6	59.4	688.5	180.0	2.8	1.260	1007.8
13	18.6	59.2	615.9	180.0	2.8	1.104	1007.6
14	18.7	59.1	578.5	180.0	3.0	0.916	1007.3
15	18.4	60.2	418.8	180.0	2.6	0.570	1007.1
16	18.0	62.2	280.3	180.0	2.5	0.304	1007.1
17	17.5	65.0	152.0	180.0	2.2	0.119	1007.2
18	17.0	67.5	25.1	180.0	1.5	0.025	1007.4
19	16.5	69.9	0.1	0.0	0.9	0.001	1007.8
20	16.3	71.4	0.0	0.0	0.8	0.000	1008.2
21	16.2	71.6	0.0	0.0	0.7	0.000	1008.4
22	16.0	72.1	0.0	0.0	0.7	0.000	1008.3
23	15.8	72.9	0.0	0.0	1.0	0.000	1008.3



**MAGGIO 2009**

(medie orarie)

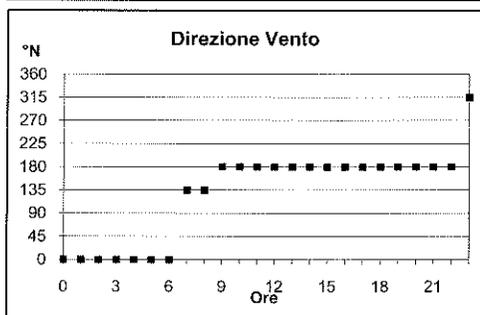
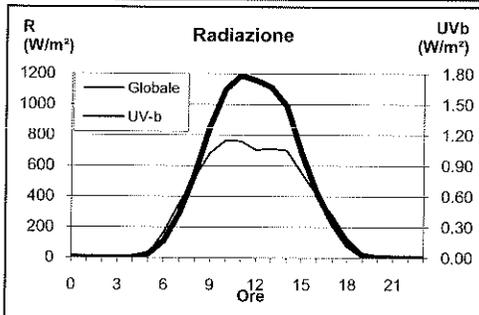
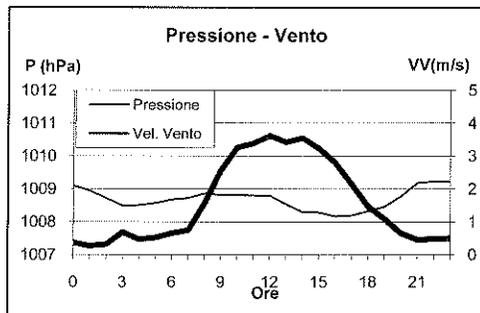
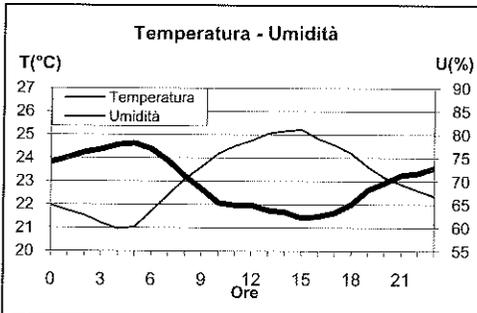
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	19.8	70.5	0.0	0.0	0.4	0.000	1012.5
1	19.5	71.2	0.0	0.0	0.4	0.000	1012.3
2	19.3	71.4	0.0	0.0	0.4	0.000	1012.1
3	19.0	72.1	0.0	0.0	0.4	0.000	1012.0
4	18.8	72.3	0.0	0.0	0.5	0.000	1011.9
5	18.7	72.3	9.2	180.0	0.6	0.022	1012.2
6	19.3	71.4	135.6	0.0	0.5	0.123	1012.4
7	20.2	68.7	318.8	0.0	0.6	0.349	1012.5
8	21.0	65.5	484.7	180.0	1.1	0.677	1012.6
9	21.6	63.5	628.2	180.0	1.7	1.062	1012.6
10	22.2	61.1	754.9	180.0	2.4	1.449	1012.6
11	22.5	61.3	791.2	180.0	3.0	1.650	1012.6
12	22.8	61.6	821.2	180.0	3.2	1.746	1012.4
13	23.4	60.4	803.7	180.0	3.1	1.632	1012.1
14	23.6	58.8	706.6	180.0	3.0	1.305	1011.9
15	23.9	55.8	583.7	180.0	2.8	0.922	1011.6
16	23.8	54.9	435.8	180.0	2.3	0.552	1011.4
17	23.4	56.6	266.2	315.0	1.9	0.255	1011.4
18	22.5	59.6	107.2	135.0	1.3	0.080	1011.5
19	21.8	63.9	6.2	135.0	0.7	0.010	1012.0
20	21.2	67.3	0.0	135.0	0.3	0.000	1012.4
21	20.9	68.4	0.0	180.0	0.3	0.000	1012.7
22	20.6	69.6	0.0	0.0	0.3	0.000	1012.8
23	20.3	70.3	0.0	0.0	0.3	0.000	1012.8



**GIUGNO 2009**

(medie orarie)

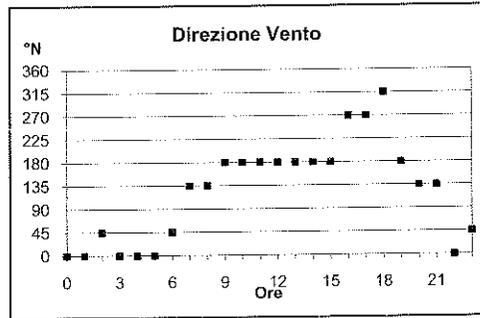
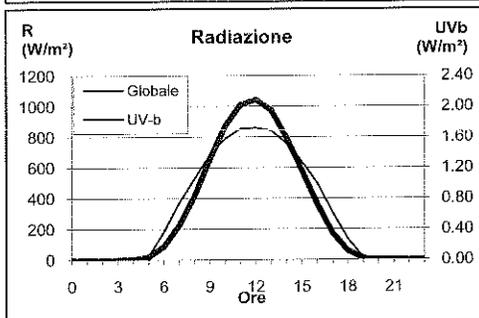
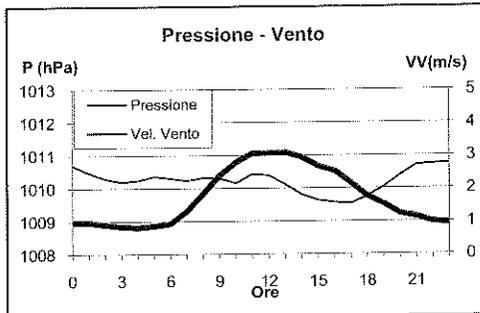
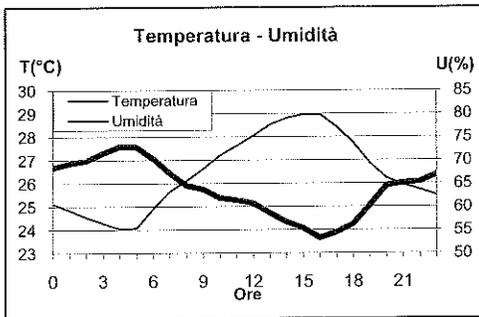
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	22.0	74.0	0.0	0.0	0.4	0.000	1009.1
1	21.7	75.1	0.0	0.0	0.3	0.000	1008.9
2	21.5	76.2	0.0	0.0	0.3	0.000	1008.7
3	21.2	76.9	0.7	0.0	0.7	0.000	1008.5
4	21.0	77.8	0.0	0.0	0.5	0.001	1008.5
5	21.0	78.2	20.5	0.0	0.5	0.035	1008.6
6	21.7	76.9	165.8	0.0	0.7	0.162	1008.7
7	22.4	74.4	352.8	135.0	0.7	0.428	1008.7
8	23.1	71.0	523.4	135.0	1.6	0.814	1008.9
9	23.6	68.3	682.8	180.0	2.6	1.285	1008.8
10	24.2	65.4	764.8	180.0	3.3	1.645	1008.8
11	24.5	64.9	759.6	180.0	3.4	1.781	1008.8
12	24.7	64.9	702.7	180.0	3.6	1.735	1008.8
13	25.0	63.8	710.4	180.0	3.4	1.666	1008.5
14	25.2	63.4	698.7	180.0	3.6	1.483	1008.3
15	25.2	62.1	551.7	180.0	3.2	1.024	1008.3
16	24.8	62.4	407.3	180.0	2.8	0.633	1008.2
17	24.5	63.2	277.2	180.0	2.1	0.344	1008.2
18	24.2	65.0	124.8	180.0	1.5	0.127	1008.3
19	23.6	68.1	25.7	180.0	1.1	0.025	1008.5
20	23.2	69.6	0.0	180.0	0.7	0.000	1008.8
21	22.9	71.3	0.0	180.0	0.5	0.000	1009.2
22	22.6	71.7	0.0	180.0	0.5	0.000	1009.2
23	22.3	72.9	0.0	315.0	0.5	0.000	1009.2



**LUGLIO 2009**

(medie orarie)

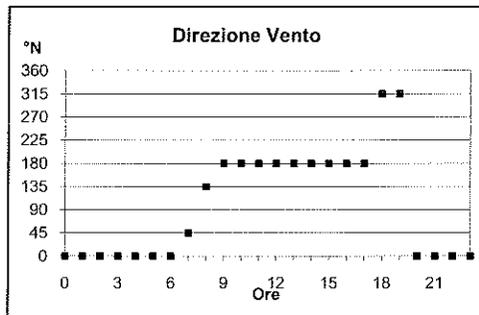
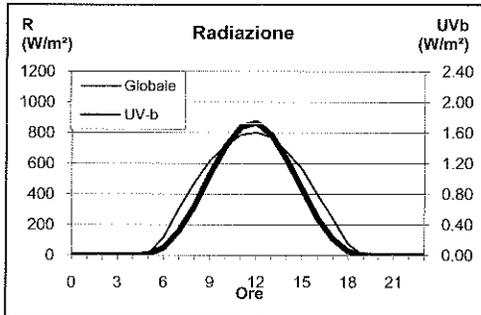
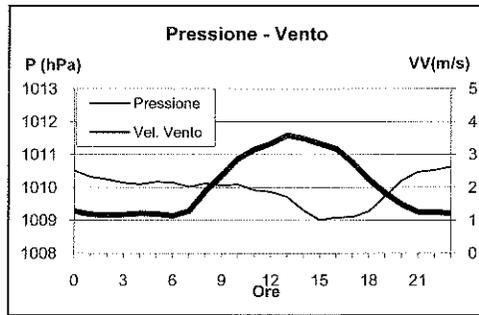
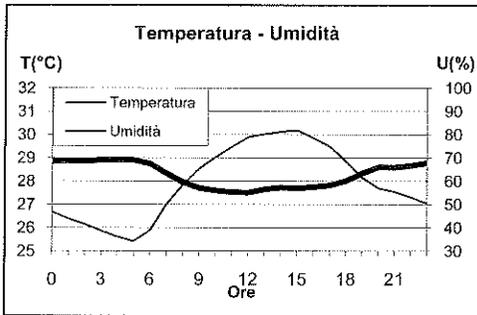
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	25.1	68.3	0.0	0.0	1.0	0.000	1010.7
1	24.8	69.3	0.0	0.0	1.0	0.000	1010.5
2	24.5	69.9	0.0	45.0	0.9	0.000	1010.3
3	24.3	71.5	0.0	0.0	0.8	0.000	1010.2
4	24.0	72.9	0.0	0.0	0.8	0.001	1010.2
5	24.1	72.9	23.4	0.0	0.9	0.037	1010.4
6	24.9	70.4	183.1	45.0	0.9	0.174	1010.3
7	25.7	67.2	371.1	135.0	1.3	0.449	1010.2
8	26.1	64.5	527.6	135.0	1.8	0.832	1010.3
9	26.6	63.7	682.9	180.0	2.4	1.306	1010.3
10	27.2	61.9	789.3	180.0	2.8	1.739	1010.2
11	27.6	61.4	852.4	180.0	3.1	2.018	1010.4
12	28.0	60.7	858.6	180.0	3.1	2.087	1010.4
13	28.5	58.6	841.8	180.0	3.1	1.951	1010.1
14	28.8	56.7	757.9	180.0	2.9	1.593	1009.8
15	29.0	55.4	639.5	180.0	2.7	1.163	1009.6
16	29.0	53.3	498.1	270.0	2.5	0.725	1009.6
17	28.4	54.5	306.2	270.0	2.2	0.343	1009.5
18	27.7	56.2	134.1	315.0	1.8	0.112	1009.7
19	26.9	60.3	14.4	180.0	1.5	0.016	1010.0
20	26.2	64.5	0.0	135.0	1.2	0.000	1010.4
21	25.9	65.1	0.0	135.0	1.1	0.000	1010.7
22	25.7	65.4	0.0	0.0	1.0	0.000	1010.7
23	25.5	66.9	0.0	45.0	1.0	0.000	1010.8



**AGOSTO 2009**

(medie orarie)

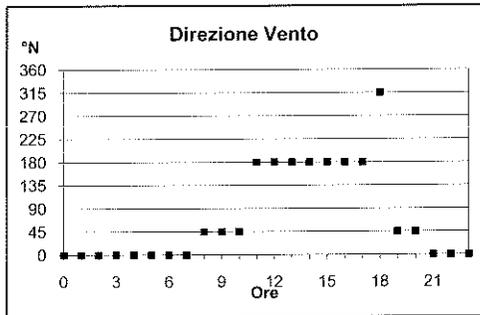
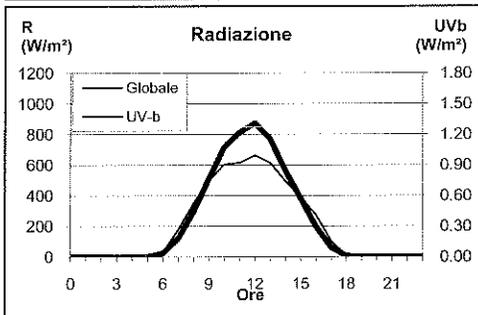
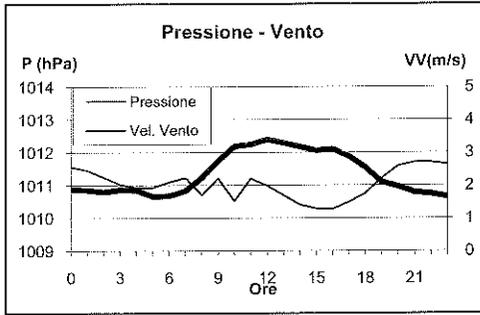
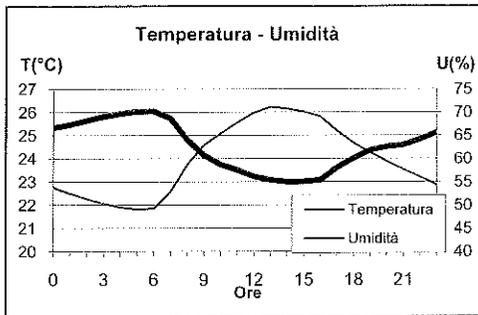
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	26.7	68.5	0.0	0.0	1.3	0.000	1010.5
1	26.4	68.9	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.3
2	26.1	68.5	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.3
3	25.9	69.1	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.1
4	25.6	69.2	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.1
5	25.4	69.1	4.5	0.0	1.2	0.010	1010.2
6	25.9	67.4	116.6	0.0	1.1	0.094	1010.2
7	27.0	63.3	304.1	45.0	1.3	0.310	1010.0
8	27.8	59.6	476.0	135.0	1.9	0.644	1010.1
9	28.5	57.0	619.7	180.0	2.4	1.056	1010.1
10	29.0	56.0	717.2	180.0	2.9	1.418	1010.1
11	29.5	55.3	783.7	180.0	3.2	1.672	1009.9
12	29.9	55.1	800.7	180.0	3.3	1.731	1009.9
13	30.0	56.5	767.8	180.0	3.6	1.571	1009.7
14	30.1	57.2	673.5	180.0	3.5	1.244	1009.3
15	30.2	56.9	562.9	180.0	3.3	0.868	1009.0
16	29.8	57.5	395.6	180.0	3.2	0.485	1009.1
17	29.5	58.3	238.5	180.0	2.8	0.217	1009.1
18	28.9	60.1	75.6	315.0	2.2	0.053	1009.3
19	28.1	63.4	1.4	315.0	1.8	0.003	1009.7
20	27.7	66.0	0.0	0.0	1.5	0.000	1010.2
21	27.5	65.9	0.0	0.0	1.3	0.000	1010.5
22	27.3	66.6	0.0	0.0	1.3	0.000	1010.5
23	27.0	67.8	0.0	0.0	1.2	0.000	1010.6



**SETTEMBRE 2009**

(medie orarie)

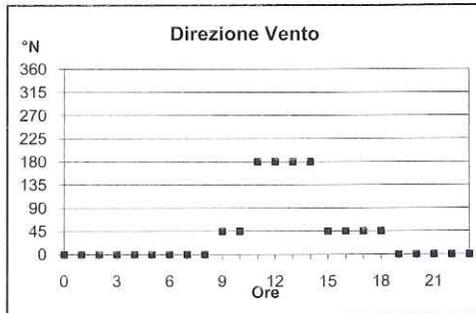
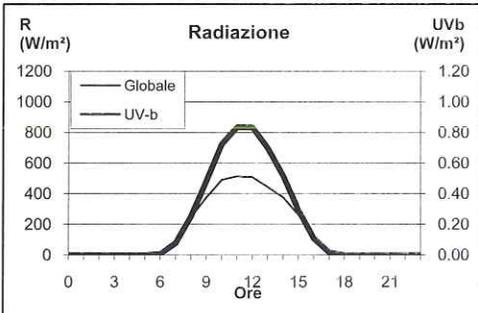
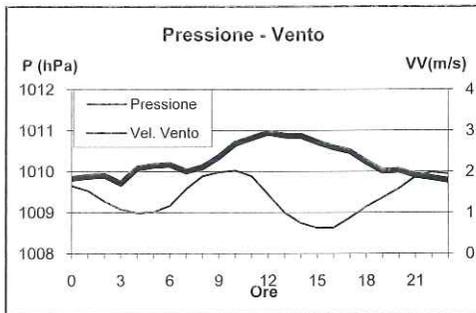
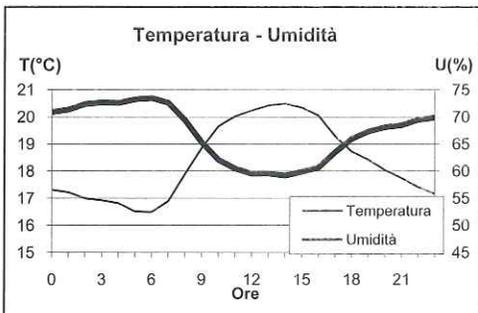
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	22.7	66.6	0.2	0.0	1.9	0.000	1011.6
1	22.5	67.3	0.0	0.0	1.9	0.000	1011.5
2	22.3	68.2	0.0	0.0	1.8	0.000	1011.2
3	22.1	69.0	0.0	0.0	1.9	0.000	1011.0
4	21.9	69.7	0.0	0.0	1.8	0.000	1010.9
5	21.8	70.1	0.0	0.0	1.7	0.001	1010.9
6	21.9	70.2	31.7	0.0	1.7	0.037	1011.1
7	22.6	68.6	179.0	0.0	1.8	0.182	1011.2
8	23.7	64.1	351.3	45.0	2.2	0.445	1010.7
9	24.6	60.8	498.4	45.0	2.7	0.767	1011.2
10	25.1	58.8	604.0	45.0	3.2	1.075	1010.5
11	25.6	57.6	614.7	180.0	3.2	1.217	1011.2
12	26.0	56.2	661.8	180.0	3.4	1.311	1011.0
13	26.2	55.4	614.8	180.0	3.3	1.156	1010.7
14	26.2	55.0	493.0	180.0	3.2	0.843	1010.4
15	26.0	55.0	390.9	180.0	3.1	0.571	1010.3
16	25.8	55.4	274.1	180.0	3.1	0.295	1010.3
17	25.2	58.1	101.1	180.0	2.9	0.090	1010.5
18	24.7	60.0	8.6	315.0	2.5	0.009	1010.7
19	24.3	61.8	0.0	45.0	2.1	0.000	1011.2
20	23.9	62.6	0.0	45.0	2.0	0.000	1011.6
21	23.5	62.9	0.0	0.0	1.8	0.000	1011.7
22	23.2	64.2	0.0	0.0	1.7	0.000	1011.7
23	22.9	65.6	0.0	0.0	1.7	0.000	1011.6



**OTTOBRE 2009**

(medie orarie)

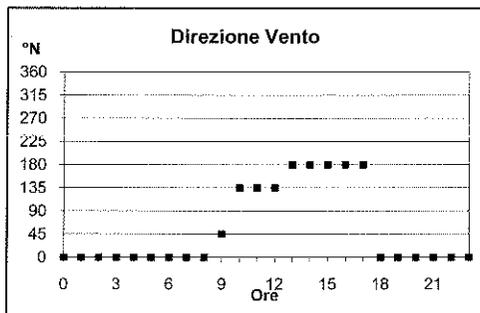
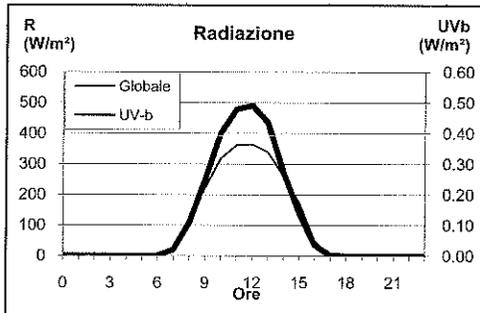
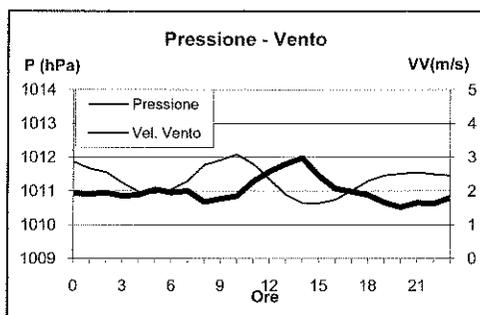
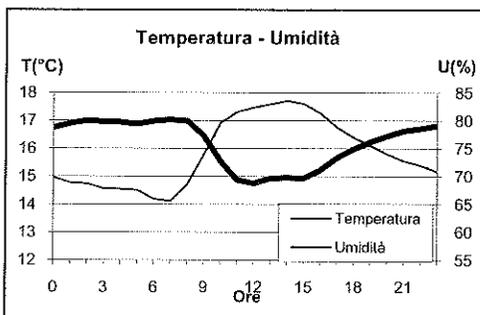
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	17.3	70.9	0.0	0.0	1.8	0.000	1009.6
1	17.2	71.4	0.0	0.0	1.9	0.000	1009.5
2	17.0	72.4	0.0	0.0	1.9	0.000	1009.3
3	16.9	72.6	0.0	0.0	1.7	0.000	1009.1
4	16.8	72.6	0.6	0.0	2.1	0.000	1009.0
5	16.5	73.2	0.1	0.0	2.1	0.000	1009.0
6	16.5	73.5	1.7	0.0	2.2	0.007	1009.2
7	16.9	72.6	85.0	0.0	2.0	0.077	1009.6
8	17.9	69.3	247.0	0.0	2.1	0.252	1009.9
9	18.9	65.3	374.1	45.0	2.4	0.481	1010.0
10	19.7	62.1	489.5	45.0	2.7	0.723	1010.0
11	20.0	60.5	513.8	180.0	2.8	0.833	1009.9
12	20.2	59.5	506.9	180.0	2.9	0.832	1009.4
13	20.4	59.6	443.2	180.0	2.9	0.698	1009.0
14	20.5	59.2	376.8	180.0	2.9	0.516	1008.7
15	20.4	59.9	263.2	45.0	2.7	0.295	1008.6
16	20.1	60.7	121.5	45.0	2.6	0.108	1008.6
17	19.3	63.4	12.3	45.0	2.5	0.016	1008.9
18	18.7	65.9	0.0	45.0	2.2	0.000	1009.1
19	18.4	67.3	0.0	0.0	2.0	0.000	1009.4
20	18.0	68.1	0.1	0.0	2.0	0.000	1009.6
21	17.7	68.4	0.0	0.0	1.9	0.000	1009.9
22	17.4	69.4	0.0	0.0	1.8	0.000	1010.0
23	17.2	69.9	0.0	0.0	1.8	0.000	1009.9



**NOVEMBRE 2009**

(medie orarie)

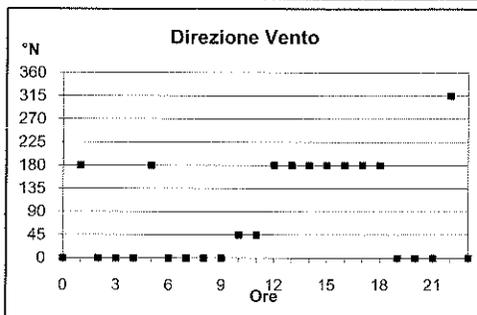
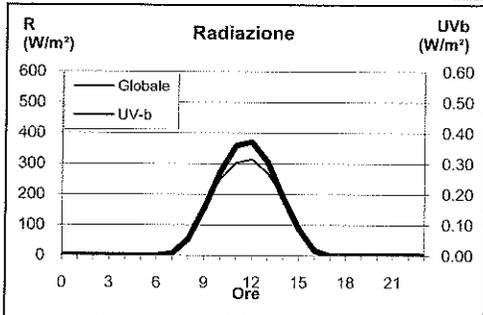
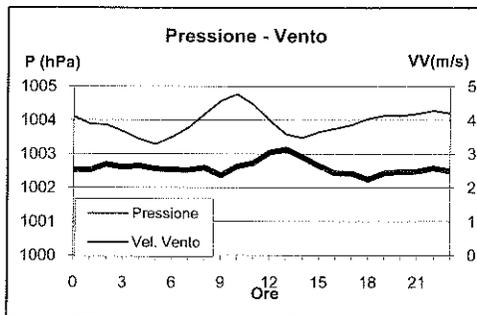
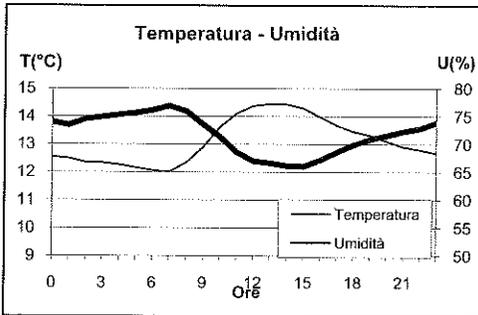
Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	15.0	78.7	0.0	0.0	1.9	0.000	1011.9
1	14.8	79.4	0.1	0.0	1.9	0.000	1011.7
2	14.7	80.0	0.0	0.0	2.0	0.000	1011.6
3	14.6	79.8	0.0	0.0	1.9	0.000	1011.2
4	14.5	79.7	0.0	0.0	1.9	0.000	1011.0
5	14.5	79.4	0.0	0.0	2.0	0.000	1010.9
6	14.2	79.9	0.0	0.0	2.0	0.000	1011.0
7	14.1	80.2	17.5	0.0	2.0	0.021	1011.3
8	14.7	79.9	122.7	0.0	1.7	0.109	1011.8
9	15.8	77.2	222.8	45.0	1.8	0.249	1011.9
10	16.9	72.8	318.5	135.0	1.8	0.402	1012.1
11	17.3	69.4	361.2	135.0	2.3	0.478	1011.8
12	17.5	68.8	363.0	135.0	2.6	0.490	1011.3
13	17.6	69.7	338.6	180.0	2.8	0.435	1010.9
14	17.7	69.8	259.8	180.0	3.0	0.274	1010.6
15	17.6	69.7	172.2	180.0	2.5	0.139	1010.6
16	17.3	71.1	48.5	180.0	2.1	0.035	1010.7
17	16.7	73.3	0.1	180.0	2.0	0.001	1011.0
18	16.4	74.9	0.1	0.0	1.9	0.000	1011.3
19	16.1	76.2	0.1	0.0	1.7	0.000	1011.5
20	15.8	77.2	0.0	0.0	1.5	0.000	1011.5
21	15.6	78.1	0.0	0.0	1.7	0.000	1011.6
22	15.4	78.5	0.0	0.0	1.6	0.000	1011.5
23	15.2	79.1	0.0	0.0	1.8	0.000	1011.5



**DICEMBRE 2009**

(medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m <sup>2</sup> )	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m <sup>2</sup> )	P(hPa)
0	12.5	74.0	0.0	0.0	2.5	0.000	1004.1
1	12.5	73.4	0.0	180.0	2.5	0.000	1003.9
2	12.3	74.5	0.0	0.0	2.7	0.000	1003.9
3	12.3	74.9	0.0	0.0	2.6	0.000	1003.7
4	12.3	75.2	0.0	0.0	2.7	0.000	1003.4
5	12.2	75.6	0.0	180.0	2.6	0.000	1003.3
6	12.1	76.1	0.0	0.0	2.5	0.000	1003.5
7	12.0	76.9	2.6	0.0	2.5	0.007	1003.8
8	12.3	75.9	62.8	0.0	2.6	0.053	1004.2
9	12.9	73.6	164.3	0.0	2.4	0.155	1004.6
10	13.6	71.3	249.4	45.0	2.6	0.274	1004.8
11	14.1	68.6	302.2	45.0	2.7	0.358	1004.5
12	14.4	67.0	313.5	180.0	3.0	0.370	1004.0
13	14.4	66.6	269.2	180.0	3.1	0.306	1003.6
14	14.4	66.1	193.9	180.0	2.9	0.189	1003.5
15	14.3	66.0	99.2	180.0	2.6	0.086	1003.7
16	14.0	67.1	14.8	180.0	2.4	0.016	1003.8
17	13.7	68.5	0.0	180.0	2.4	0.000	1003.9
18	13.5	69.9	0.0	180.0	2.2	0.000	1004.0
19	13.3	70.9	0.0	0.0	2.4	0.000	1004.1
20	13.1	71.5	0.0	0.0	2.5	0.000	1004.1
21	12.9	72.3	0.0	0.0	2.5	0.000	1004.2
22	12.8	72.8	0.0	315.0	2.6	0.000	1004.3
23	12.7	73.8	0.0	0.0	2.5	0.000	1004.2



**GENNAIO 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin(°C)	Tmax(°C)	Umin(%)	Umax(%)	Tmare(°C)
1/1/09	13.6	85.0	9.3	10.0	14.2	69.0	85.0	15.2
2/1/09	12.6	81.8	21.0	10.3	14.5	71.6	89.0	15.2
3/1/09	9.5	82.9	63.2	7.0	13.5	69.9	91.4	15.2
4/1/09	7.2	68.7	0.0	5.1	10.2	60.7	76.3	14.8
5/1/09	7.5	59.5	0.0	4.7	12.1	41.4	69.1	14.5
6/1/09	8.6	63.9	0.2	5.4	12.5	42.7	73.2	14.6
7/1/09	11.4	76.9	14.0	7.4	14.7	61.8	86.2	14.8
8/1/09	11.4	85.3	10.4	9.9	14.3	76.6	89.4	14.8
9/1/09	10.9	71.0	0.0	9.6	13.5	60.1	79.4	14.6
10/1/09	10.4	73.6	2.0	8.9	12.7	65.2	80.0	14.6
11/1/09	11.8	69.2	0.0	9.8	14.9	54.3	76.2	14.7
12/1/09	11.3	77.0	8.0	9.8	12.7	71.2	85.7	14.8
13/1/09	11.5	78.0	9.8	10.1	14.9	70.6	86.4	14.7
14/1/09	12.9	83.5	33.0	11.1	15.8	64.1	91.6	14.7
15/1/09	12.2	80.0	4.0	10.9	13.8	71.2	85.8	14.7
16/1/09	12.1	73.9	0.0	10.1	15.6	55.3	85.2	14.7
17/1/09	11.3	73.9	0.0	8.2	14.4	61.2	80.3	14.7
18/1/09	12.7	78.5	0.0	9.5	14.5	69.0	85.8	14.7
19/1/09	14.0	76.2	0.0	13.2	15.1	67.5	79.9	14.8
20/1/09	14.6	78.9	21.0	13.6	15.6	66.8	91.7	14.9
21/1/09	13.4	89.9	35.6	12.4	14.2	86.2	93.4	15.0
22/1/09	13.0	86.2	2.0	11.1	15.6	78.0	92.8	14.8
23/1/09	11.3	72.0	6.2	8.8	13.9	52.2	93.1	14.8
24/1/09	13.9	84.6	19.8	12.2	15.4	69.0	93.4	14.8
25/1/09	11.8	77.6	5.0	10.4	12.7	70.2	84.3	14.6
26/1/09	12.4	78.9	12.0	10.6	15.0	68.7	87.6	14.5
27/1/09	9.8	82.8	43.2	8.0	13.0	66.7	89.7	14.4
28/1/09	9.9	75.9	0.0	8.0	12.6	63.5	87.3	13.9
29/1/09	10.9	61.7	0.0	8.4	14.9	43.1	74.3	13.6
30/1/09	10.5	59.2	0.0	8.5	13.2	40.8	66.2	13.8
31/1/09	9.4	63.8	0.4	6.4	11.9	48.3	74.5	13.8

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 4.7 °C il 5/1 alle ore 7.30  
 Max: 15.8 °C il 14/1 alle ore 0.30

**Umidità**

Min: 40.8 % il 30/1 alle ore 13.10  
 Max: 93.4 % il 21/1 alle ore 4.20

**Pressione**

Min: 982.7 hPa il 24/1 alle ore 15.00  
 Max: 1021.7 hPa il 12/1 alle ore 10.10

**Velocità del vento**

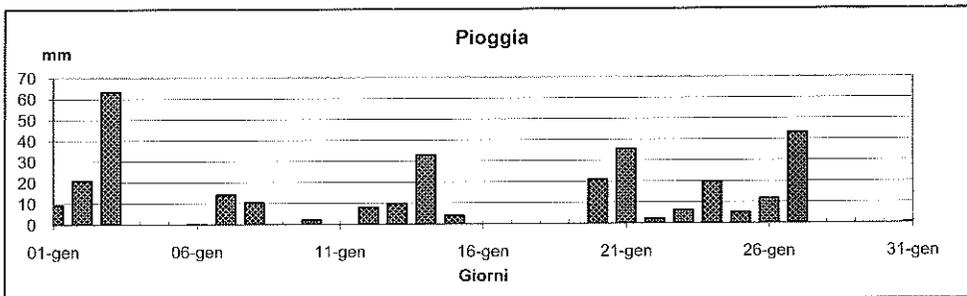
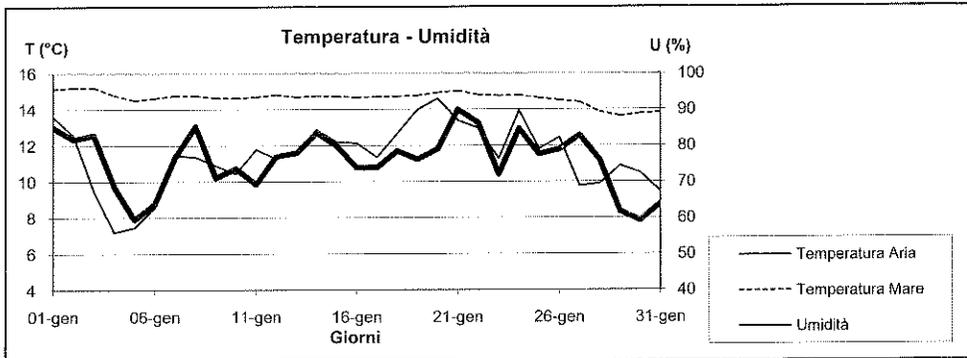
Max: 16.9 m/s il 7/1 alle ore 16.40

**Radiazione totale**

Max: 749.6 W/m² il 30/1 alle ore 12.00

**Radiazione Uvb**

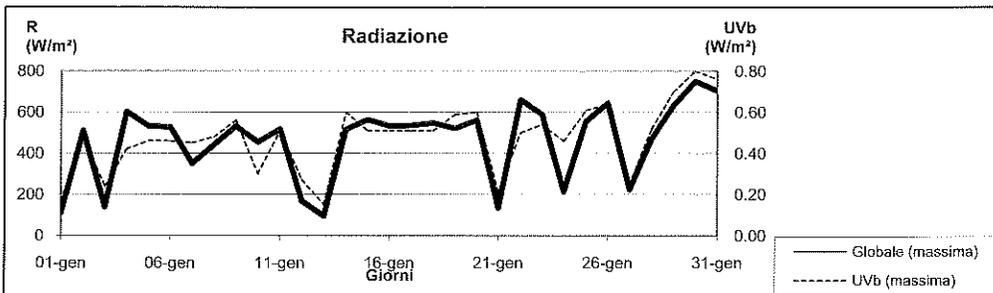
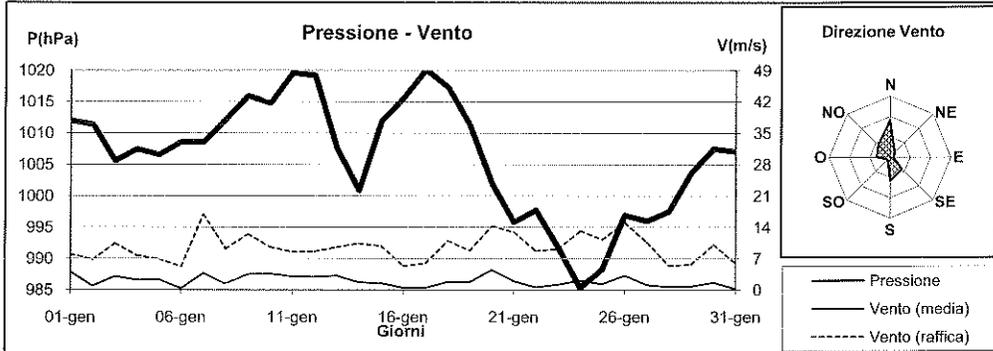
Max: 0.800 W/m² il 30/1 alle ore 11.40



**GENNAIO 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/1/09	1012.0	115.0	4.0	80.0	0.040	1007.0	1014.0	8.0	110.0	0.170
2/1/09	1011.4	315.0	0.9	71.9	0.076	1007.1	1013.8	6.8	511.0	0.470
3/1/09	1005.6	0.0	3.0	23.0	0.035	1004.4	1007.3	10.4	138.6	0.240
4/1/09	1007.5	0.0	2.2	92.7	0.071	1005.8	1008.9	7.7	602.8	0.420
5/1/09	1006.6	315.0	2.3	131.4	0.092	1005.2	1008.3	6.9	531.2	0.460
6/1/09	1008.7	0.0	0.4	122.3	0.092	1006.9	1010.2	5.2	527.2	0.460
7/1/09	1008.6	135.0	3.8	31.2	0.046	1006.8	1010.1	16.9	350.1	0.450
8/1/09	1012.2	0.0	1.4	38.6	0.050	1008.9	1015.6	9.2	442.2	0.480
9/1/09	1016.0	0.0	3.5	95.6	0.096	1014.4	1018.1	12.5	532.4	0.560
10/1/09	1014.8	0.0	3.6	53.6	0.054	1013.2	1018.1	9.6	455.3	0.300
11/1/09	1019.6	0.0	3.0	128.2	0.104	1018.1	1021.1	8.5	517.7	0.510
12/1/09	1019.2	0.0	2.9	30.2	0.045	1016.7	1021.7	8.6	167.8	0.270
13/1/09	1007.6	0.0	3.2	9.3	0.015	998.5	1016.9	9.6	94.7	0.150
14/1/09	1000.9	270.0	1.7	42.8	0.053	996.8	1008.5	10.4	516.2	0.600
15/1/09	1011.9	135.0	1.5	80.0	0.078	1008.9	1014.4	9.8	564.4	0.510
16/1/09	1015.6	0.0	0.5	117.9	0.103	1013.2	1018.7	5.4	533.6	0.510
17/1/09	1020.1	180.0	0.5	134.3	0.106	1018.6	1021.1	6.0	535.5	0.510
18/1/09	1017.3	180.0	1.8	85.3	0.079	1013.2	1021.1	11.0	548.2	0.510
19/1/09	1011.3	180.0	1.8	58.4	0.063	1007.7	1013.8	8.8	521.3	0.590
20/1/09	1002.0	180.0	4.5	97.4	0.092	997.2	1007.7	14.3	562.4	0.600
21/1/09	995.8	135.0	2.0	19.8	0.034	993.7	999.1	12.9	135.0	0.210
22/1/09	997.7	315.0	0.6	70.0	0.061	994.2	1000.3	8.7	660.9	0.500
23/1/09	991.9	180.0	1.2	111.4	0.101	987.5	994.0	9.2	590.1	0.540
24/1/09	985.4	270.0	2.1	15.0	0.034	982.7	987.5	13.2	215.3	0.460
25/1/09	988.3	270.0	1.3	45.5	0.069	984.5	995.5	11.3	556.1	0.610
26/1/09	996.9	180.0	3.3	60.6	0.078	994.7	998.5	15.0	645.1	0.640
27/1/09	996.0	135.0	1.1	8.7	0.020	995.2	997.2	10.6	225.2	0.250
28/1/09	997.5	0.0	0.7	59.6	0.074	995.4	1000.9	5.4	471.9	0.520
29/1/09	1003.7	315.0	0.8	132.8	0.141	1000.9	1007.0	5.7	632.8	0.700
30/1/09	1007.5	45.0	1.7	132.8	0.150	1006.4	1008.3	10.1	749.8	0.800
31/1/09	1007.0	0.0	0.2	80.6	0.113	1005.2	1008.3	5.9	704.0	0.760



**FEBBRAIO 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/2/09	11.0	69.6	0.2	9.1	13.8	57.1	76.6	13.8
2/2/09	14.3	68.4	1.2	10.1	17.5	54.6	87.0	13.8
3/2/09	16.5	68.2	4.8	13.2	18.6	51.6	89.2	14.1
4/2/09	13.9	77.5	4.8	12.8	15.4	58.5	90.7	14.2
5/2/09	14.3	79.3	0.0	13.1	15.7	75.1	84.6	14.2
6/2/09	14.8	75.1	0.6	13.7	16.0	60.6	86.7	14.4
7/2/09	13.1	80.4	19.4	8.7	15.6	65.8	85.4	14.4
8/2/09	11.2	69.9	3.6	9.5	13.5	55.0	81.6	14.2
9/2/09	10.8	73.1	4.4	8.0	13.6	57.6	84.4	13.9
10/2/09	12.6	81.7	1.8	9.1	14.5	70.1	89.6	14.0
11/2/09	11.5	63.3	1.0	7.5	13.8	48.4	73.9	13.9
12/2/09	8.1	58.6	0.0	5.8	11.3	38.6	76.2	13.7
13/2/09	6.8	51.5	0.0	4.9	9.3	35.0	63.4	13.5
14/2/09	5.9	51.0	0.0	3.1	9.9	35.3	62.1	13.2
15/2/09	6.4	53.8	0.0	4.3	9.3	40.0	62.9	13.0
16/2/09	7.1	46.1	0.0	4.0	10.4	32.4	58.6	12.9
17/2/09	8.2	57.2	0.0	4.5	10.6	41.8	65.2	13.0
18/2/09	5.9	68.0	9.8	2.9	9.5	50.5	86.4	13.1
19/2/09	5.6	47.5	0.0	2.2	9.7	32.5	62.8	12.8
20/2/09	6.8	46.2	0.0	4.0	10.5	36.3	55.1	12.9
21/2/09	9.1	47.1	0.0	4.6	14.5	29.3	59.2	13.1
22/2/09	9.2	51.5	0.0	6.7	13.1	39.3	62.5	13.4
23/2/09	9.6	54.4	0.0	6.2	13.1	37.5	69.7	13.4
24/2/09	9.9	52.6	0.0	8.0	13.0	29.8	71.9	13.5
25/2/09	9.4	51.2	0.0	7.1	12.8	33.7	65.3	13.5
26/2/09	9.4	53.4	0.0	6.4	12.5	38.6	64.7	13.5
27/2/09	11.3	71.6	0.0	8.8	14.9	52.8	79.7	13.5
28/2/09	12.2	75.1	0.0	8.5	16.8	48.0	85.2	13.7

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 2.2 °C il 19/2 alle ore 3.10

Max: 18.6 °C il 3/2 alle ore 4.10

**Umidità**

Min: 29.3 % il 21/2 alle ore 15.00

Max: 90.7 % il 4/2 alle ore 0.40

**Pressione**

Min: 986.5 hPa il 8/2 alle ore 1.20

Max: 1019.3 hPa il 20/2 alle ore 21.40

**Velocità del vento**

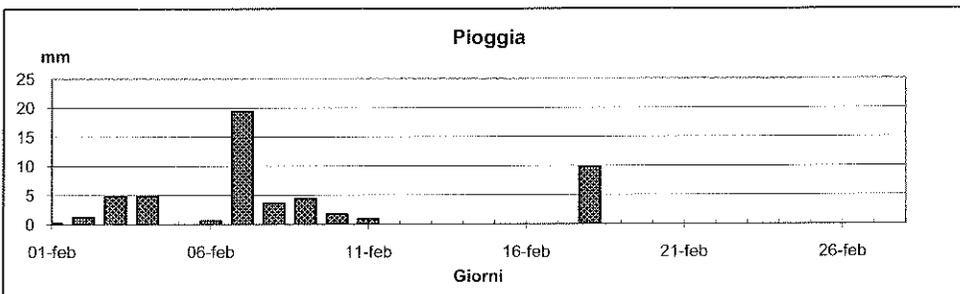
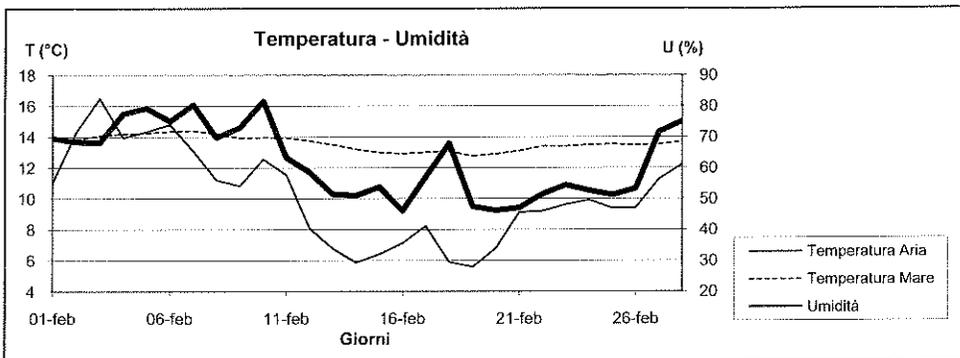
Max: 21.5 m/s il 2/2 alle ore 19.10

**Radiazione totale**

Max: 855 W/m² il 27/2 alle ore 11.30

**Radiazione UVb**

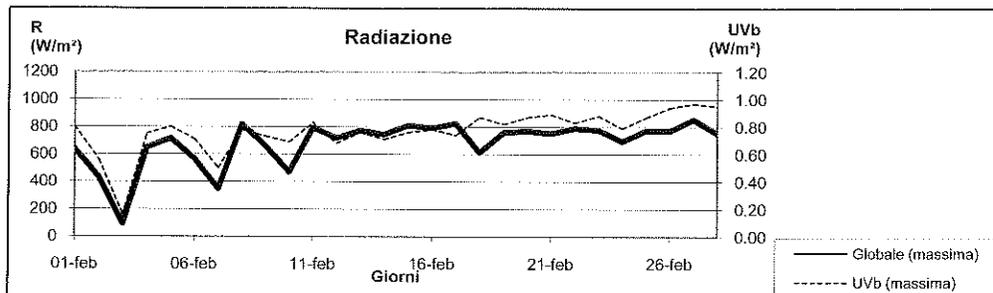
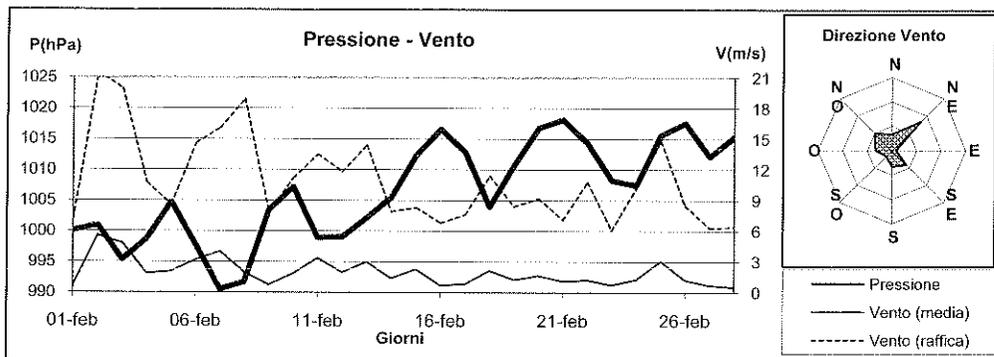
Max: 0.970 W/m² il 27/2 alle ore 11.30



## FEBBRAIO 2009

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/2/09	1000.1	315.0	0.6	60.4	0.085	996.6	1005.2	7.1	636.4	0.800
2/2/09	1001.0	135.0	5.6	59.9	0.088	998.2	1003.9	21.5	430.4	0.560
3/2/09	995.4	135.0	4.8	14.9	0.025	993.0	998.4	19.9	93.9	0.160
4/2/09	998.7	270.0	1.9	100.8	0.119	993.2	1004.7	10.7	649.0	0.750
5/2/09	1004.7	180.0	2.1	127.8	0.140	1002.1	1007.0	8.6	716.6	0.800
6/2/09	997.7	180.0	3.2	58.8	0.082	995.5	1001.7	14.6	566.8	0.710
7/2/09	990.5	135.0	4.0	32.4	0.045	987.8	996.6	16.1	346.1	0.500
8/2/09	991.7	315.0	2.0	119.6	0.124	986.5	997.8	18.9	819.8	0.780
9/2/09	1003.4	315.0	0.7	142.1	0.140	997.9	1009.5	7.9	661.7	0.730
10/2/09	1007.2	225.0	1.8	43.5	0.066	1003.7	1010.2	11.2	471.9	0.690
11/2/09	998.9	270.0	3.4	143.1	0.144	996.0	1003.9	13.5	794.1	0.830
12/2/09	999.0	45.0	2.0	141.3	0.131	995.9	1001.5	11.8	720.6	0.680
13/2/09	1002.2	45.0	3.0	185.3	0.161	1000.3	1004.3	14.4	774.4	0.760
14/2/09	1005.5	45.0	1.4	170.9	0.139	1003.9	1008.3	7.9	745.1	0.710
15/2/09	1012.3	45.0	2.3	124.9	0.123	1008.3	1016.2	8.3	811.1	0.760
16/2/09	1016.6	0.0	0.7	189.0	0.162	1015.6	1018.1	6.8	791.4	0.780
17/2/09	1012.9	270.0	0.8	123.8	0.113	1007.1	1016.3	7.6	824.6	0.740
18/2/09	1004.0	45.0	2.1	50.0	0.073	1000.9	1007.7	11.4	615.0	0.870
19/2/09	1010.7	45.0	1.3	205.3	0.179	1007.7	1014.4	8.4	760.1	0.820
20/2/09	1016.8	0.0	1.7	210.7	0.198	1014.4	1019.3	9.2	769.2	0.870
21/2/09	1018.1	315.0	1.1	198.7	0.195	1016.2	1019.3	7.1	753.0	0.890
22/2/09	1014.3	45.0	1.2	149.1	0.158	1011.4	1017.5	10.8	790.2	0.830
23/2/09	1008.3	0.0	0.7	206.6	0.195	1005.8	1011.4	6.1	777.1	0.880
24/2/09	1007.5	45.0	1.3	137.6	0.149	1005.2	1011.4	10.2	695.3	0.790
25/2/09	1015.6	45.0	3.1	199.6	0.192	1011.4	1019.3	14.8	773.2	0.870
26/2/09	1017.6	315.0	1.2	215.1	0.213	1014.4	1019.3	8.5	770.4	0.940
27/2/09	1012.1	135.0	0.7	147.3	0.152	1010.1	1014.5	6.3	855.0	0.970
28/2/09	1015.4	180.0	0.5	211.7	0.220	1013.8	1016.9	6.4	752.2	0.950



**MARZO 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/3/09	12.0	77.6	3.0	10.3	14.8	57.0	84.8	13.9
2/3/09	14.4	83.1	7.8	13.5	16.8	69.6	91.6	13.9
3/3/09	13.9	87.2	0.6	13.1	15.0	83.3	90.7	14.0
4/3/09	14.8	77.4	20.2	12.5	17.7	49.3	91.9	14.2
5/3/09	12.6	78.4	28.4	9.5	15.6	60.3	92.4	14.2
6/3/09	9.7	70.9	5.4	8.4	12.0	55.8	82.1	13.7
7/3/09	11.6	63.2	0.2	8.9	15.3	49.5	76.0	13.4
8/3/09	13.4	55.9	0.0	10.0	17.2	37.9	78.9	13.5
9/3/09	13.5	76.6	0.0	11.3	15.0	65.8	83.8	13.8
10/3/09	12.6	54.8	0.2	9.8	15.1	33.0	74.0	13.8
11/3/09	12.8	71.2	17.4	9.4	16.6	47.9	87.2	13.9
12/3/09	11.8	48.8	0.0	8.7	15.1	27.1	82.0	14.0
13/3/09	12.0	56.4	0.0	7.9	15.6	39.9	80.6	13.9
14/3/09	12.8	71.5	0.0	9.8	15.4	53.1	81.8	14.0
15/3/09	13.0	76.5	0.0	10.6	15.4	56.1	84.2	14.2
16/3/09	14.6	60.5	0.0	11.3	18.8	39.0	86.6	14.3
17/3/09	14.4	49.4	0.0	11.5	17.8	34.0	74.8	14.3
18/3/09	14.3	41.9	0.0	11.0	18.7	29.1	54.4	14.3
19/3/09	12.9	54.6	0.0	8.9	14.7	30.7	79.1	14.4
20/3/09	8.5	66.4	4.0	6.9	11.4	47.3	84.3	14.2
21/3/09	8.5	47.8	0.0	6.9	10.8	39.6	60.6	13.6
22/3/09	9.9	49.7	0.0	6.9	13.7	36.5	63.1	13.2
23/3/09	11.8	50.6	0.0	6.7	16.1	26.2	68.4	13.2
24/3/09	13.5	71.3	0.0	11.4	15.2	45.0	83.2	13.5
25/3/09	11.9	47.2	6.8	7.3	15.9	19.3	79.4	13.6
26/3/09	13.1	66.1	6.2	9.8	16.5	46.8	87.2	13.7
27/3/09	13.0	73.3	0.0	10.4	15.0	69.2	77.9	13.9
28/3/09	15.7	60.0	0.2	10.7	19.7	31.1	77.3	14.2
29/3/09	17.4	75.9	5.4	14.9	19.0	66.0	87.3	14.5
30/3/09	17.3	81.2	0.2	15.5	19.5	72.6	89.9	14.7
31/3/09	18.1	73.6	9.0	16.0	21.9	57.2	89.2	14.8

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 6.7 °C il 23/3 alle ore 7.00

Max: 21.9 °C il 31/3 alle ore 13.00

**Umidità**

Min: 19.3 % il 25/3 alle ore 13.00

Max: 92.4 % il 5/3 alle ore 4.40

**Pressione**

Min: 973.2 hPa il 5/3 alle ore 5.10

Max: 1021.1 hPa il 17/3 alle ore 8.30

**Velocità del vento**

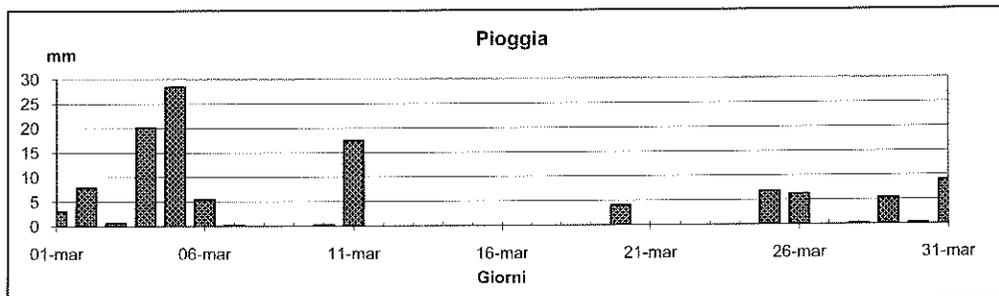
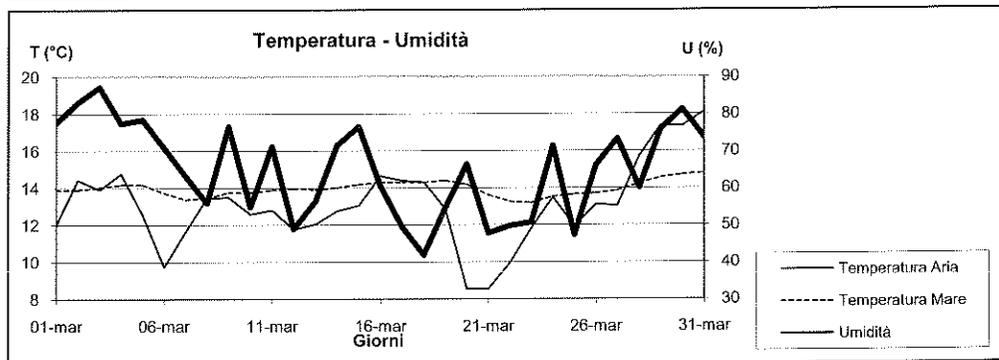
Max: 20.5 m/s il 29/3 alle ore 13.30

**Radiazione totale**

Max: 994.6 W/m² il 27/3 alle ore 12.50

**Radiazione UVb**

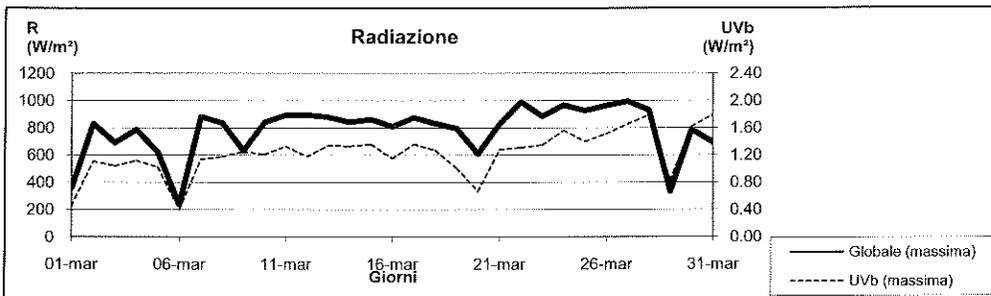
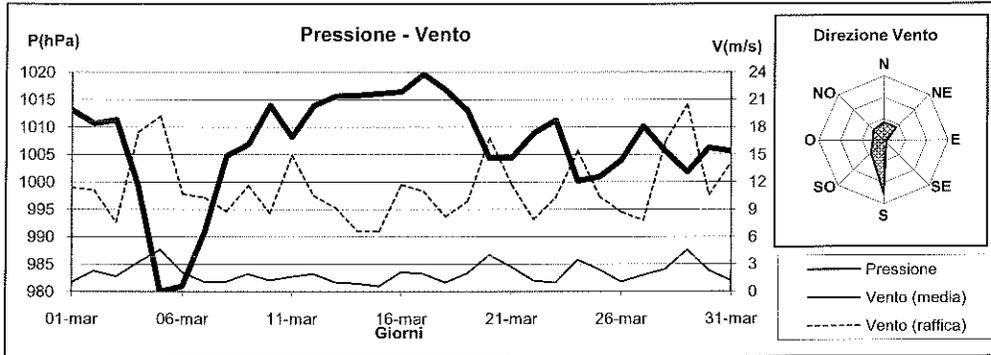
Max: 1.790 W/m² il 28/3 alle ore 12.00



**MARZO 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/3/09	1013.1	180.0	1.0	45.3	0.082	1010.2	1016.3	11.4	358.0	0.460
2/3/09	1010.7	180.0	2.3	139.4	0.184	1009.5	1012.5	11.1	831.7	1.110
3/3/09	1011.3	180.0	1.7	95.6	0.153	1009.0	1012.6	7.6	689.7	1.040
4/3/09	999.2	180.0	3.2	139.1	0.195	984.8	1009.3	17.5	788.2	1.120
5/3/09	980.0	225.0	4.6	67.8	0.120	973.2	984.5	19.2	620.2	1.020
6/3/09	981.0	315.0	2.1	31.6	0.065	978.8	983.9	10.7	237.8	0.400
7/3/09	990.8	45.0	1.1	146.6	0.188	983.8	1000.0	10.3	883.9	1.140
8/3/09	1004.8	315.0	1.1	238.1	0.280	1000.3	1008.3	8.8	836.4	1.180
9/3/09	1006.9	225.0	1.9	82.2	0.148	1004.7	1010.1	11.6	633.6	1.250
10/3/09	1014.0	180.0	1.2	237.2	0.286	1010.1	1016.2	8.6	842.4	1.210
11/3/09	1008.2	225.0	1.6	203.6	0.267	1005.2	1012.6	14.9	895.7	1.330
12/3/09	1013.9	0.0	1.9	246.0	0.274	1010.1	1018.1	10.5	895.3	1.180
13/3/09	1015.7	225.0	1.0	256.9	0.323	1013.8	1018.1	9.2	880.3	1.340
14/3/09	1015.8	180.0	0.9	249.4	0.316	1015.0	1016.9	6.6	842.8	1.330
15/3/09	1016.1	180.0	0.6	214.5	0.295	1015.0	1017.4	6.6	863.7	1.360
16/3/09	1016.5	45.0	2.2	188.5	0.252	1013.8	1020.5	11.7	810.7	1.150
17/3/09	1019.6	0.0	2.0	240.5	0.316	1018.0	1021.1	11.0	876.0	1.360
18/3/09	1016.8	315.0	1.0	251.2	0.312	1014.6	1018.7	8.2	832.5	1.270
19/3/09	1012.9	180.0	2.0	134.5	0.197	1007.0	1016.9	9.9	796.1	1.010
20/3/09	1004.3	45.0	4.0	90.3	0.129	1003.3	1006.9	16.8	610.3	0.670
21/3/09	1004.4	45.0	2.7	148.8	0.212	1003.3	1006.6	11.7	828.5	1.280
22/3/09	1008.9	0.0	1.2	190.2	0.254	1006.4	1012.0	7.9	990.2	1.310
23/3/09	1011.3	270.0	1.0	269.8	0.325	1008.8	1013.3	10.3	884.3	1.350
24/3/09	1000.2	180.0	3.5	145.2	0.231	995.2	1008.7	15.4	968.9	1.560
25/3/09	1001.0	270.0	2.4	286.1	0.350	994.8	1003.9	10.4	927.4	1.400
26/3/09	1004.0	0.0	1.1	239.4	0.325	999.7	1010.1	8.7	964.1	1.510
27/3/09	1010.2	180.0	1.8	241.1	0.339	1009.5	1011.4	7.8	994.6	1.660
28/3/09	1005.7	180.0	2.5	233.8	0.367	1001.8	1010.2	16.4	930.9	1.790
29/3/09	1001.8	180.0	4.6	48.3	0.124	999.6	1005.2	20.5	332.3	0.830
30/3/09	1006.3	180.0	2.3	145.5	0.224	1005.2	1007.6	10.6	785.8	1.620
31/3/09	1005.7	180.0	1.2	62.9	0.148	1004.0	1007.0	14.1	694.1	1.790



**APRILE 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T <sub>min</sub> (°C)	T <sub>max</sub> (°C)	U <sub>min</sub> (%)	U <sub>max</sub> (%)	T <sub>mare</sub> (°C)
1/4/09	17.0	65.9	1.0	14.6	21.6	33.6	79.0	14.8
2/4/09	14.8	76.5	0.0	13.2	17.4	62.0	87.1	14.8
3/4/09	15.6	70.7	0.0	11.7	20.4	51.9	86.8	14.9
4/4/09	16.0	72.1	0.0	14.2	18.6	57.0	78.2	14.9
5/4/09	16.1	69.8	0.0	13.3	20.4	50.5	80.3	15.1
6/4/09	15.5	78.2	0.0	12.6	18.9	67.5	85.8	15.2
7/4/09	15.9	77.8	0.0	14.5	18.2	61.1	86.1	15.3
8/4/09	17.2	65.5	0.0	13.1	21.1	35.6	87.3	15.3
9/4/09	18.7	50.7	0.0	15.9	21.7	35.3	73.0	15.3
10/4/09	18.4	47.9	0.0	16.4	21.9	32.2	61.7	15.4
11/4/09	18.1	48.9	0.0	15.6	22.0	31.9	63.0	15.4
12/4/09	17.9	50.7	3.4	13.9	23.8	30.6	76.3	15.7
13/4/09	16.0	61.5	0.2	13.7	18.9	50.6	77.0	16.0
14/4/09	16.3	57.1	0.0	13.1	19.8	40.0	69.1	16.0
15/4/09	16.2	78.0	0.0	14.2	18.5	67.7	89.4	16.0
16/4/09	16.7	77.4	0.0	14.4	19.2	64.5	88.3	15.9
17/4/09	16.6	81.9	0.8	15.2	18.5	74.8	88.8	16.1
18/4/09	17.0	68.2	0.0	14.3	21.4	40.4	85.3	16.1
19/4/09	15.8	75.8	4.4	14.3	16.9	54.0	84.1	16.2
20/4/09	16.5	77.2	3.0	14.3	20.0	58.6	89.7	16.1
21/4/09	14.8	80.8	15.2	13.2	17.5	63.8	86.8	16.1
22/4/09	16.8	65.3	0.0	14.2	19.8	51.5	79.8	15.9
23/4/09	16.4	72.7	34.0	14.2	19.8	57.8	87.8	15.9
24/4/09	16.1	77.2	0.0	12.8	19.5	59.6	87.0	16.0
25/4/09	17.3	67.7	0.0	13.5	20.2	53.5	83.4	16.1
26/4/09	19.4	58.4	0.0	16.3	22.2	39.0	72.9	16.3
27/4/09	19.5	58.8	7.0	13.5	24.5	26.5	87.5	16.5
28/4/09	15.0	79.2	8.6	13.3	17.1	58.5	87.4	16.5
29/4/09	16.3	72.7	2.2	14.9	18.4	57.7	85.3	16.4
30/4/09	15.5	67.8	6.6	13.4	18.3	47.7	79.2	16.4

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 11.7 °C il 3/4 alle ore 6.10

Max: 24.5 °C il 27/4 alle ore 10.50

**Umidità**

Min: 26.5 % il 27/4 alle ore 10.50

Max: 89.7 % il 20/4 alle ore 8.50

**Pressione**

Min: 991.2 hPa il 13/4 alle ore 4.30

Max: 1014.9 hPa il 25/4 alle ore 10.10

**Velocità del vento**

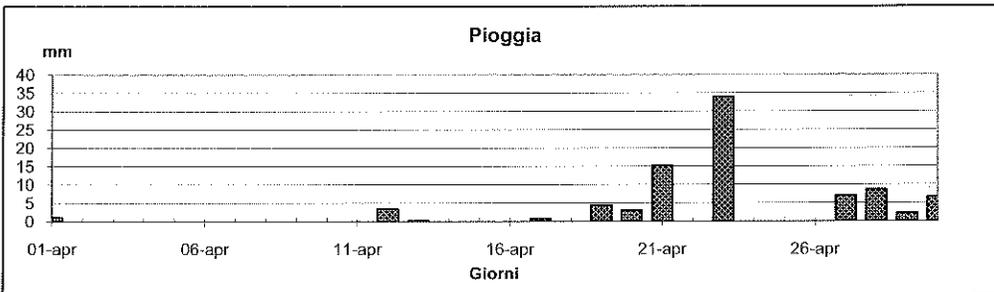
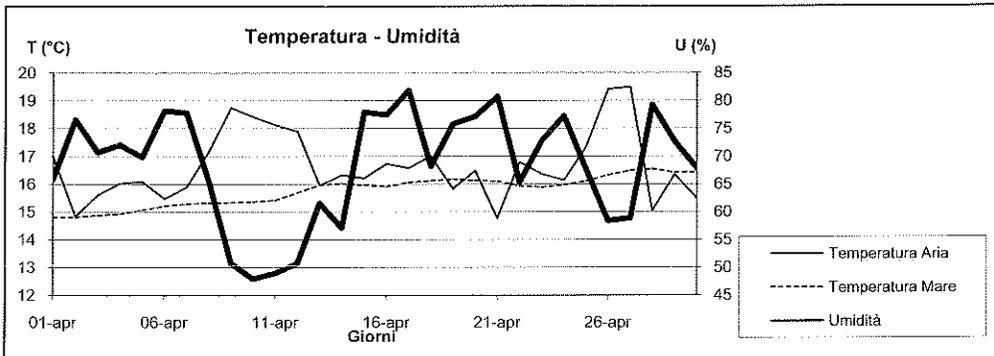
Max: 20.6 m/s il 27/4 alle ore 11.20

**Radiazione totale**

Max: 1063.8 W/m<sup>2</sup> il 29/4 alle ore 13.00

**Radiazione UVb**

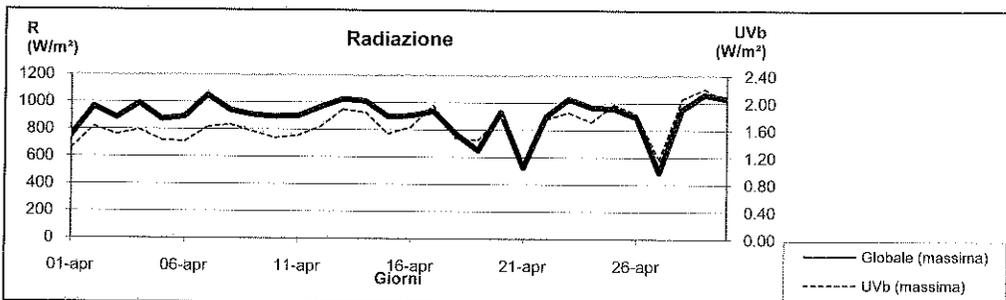
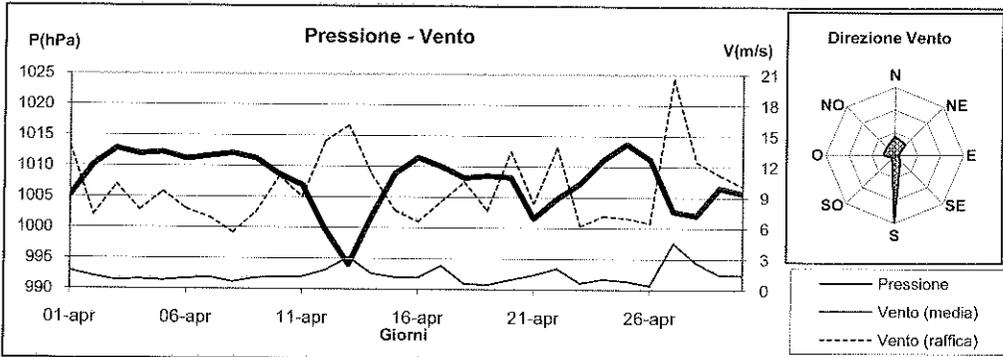
Max: 2.210 W/m<sup>2</sup> il 29/4 alle ore 11.40



**APRILE 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/4/09	1005.1	180.0	1.7	96.4	0.167	1003.3	1007.7	13.9	753.4	1.320
2/4/09	1010.2	180.0	1.2	292.6	0.407	997.0	1013.4	7.2	968.5	1.640
3/4/09	1012.8	45.0	0.8	259.4	0.352	1011.3	1013.8	10.2	885.9	1.520
4/4/09	1012.0	180.0	0.9	236.6	0.340	1010.7	1013.2	7.7	990.6	1.590
5/4/09	1012.2	180.0	0.8	253.5	0.351	1010.1	1013.2	9.5	874.0	1.440
6/4/09	1011.2	180.0	1.0	280.2	0.358	1009.5	1012.0	7.8	894.2	1.420
7/4/09	1011.6	180.0	1.1	274.2	0.367	1010.8	1013.0	7.0	1051.5	1.630
8/4/09	1012.1	180.0	0.7	272.7	0.397	1011.3	1013.2	5.5	942.0	1.670
9/4/09	1011.3	180.0	1.1	248.5	0.370	1010.1	1012.4	7.5	908.0	1.570
10/4/09	1008.6	180.0	1.2	209.4	0.301	1007.6	1010.7	11.0	895.7	1.480
11/4/09	1006.9	180.0	1.2	269.9	0.372	1006.2	1008.3	9.0	899.3	1.510
12/4/09	999.7	0.0	1.8	180.7	0.294	993.4	1006.4	14.5	966.5	1.640
13/4/09	994.0	45.0	3.1	238.7	0.359	991.2	998.5	16.0	1026.2	1.900
14/4/09	1001.9	315.0	1.5	276.7	0.399	998.6	1006.4	11.2	1011.6	1.850
15/4/09	1008.9	180.0	1.2	289.3	0.407	1006.4	1011.4	7.7	897.7	1.540
16/4/09	1011.5	180.0	1.1	280.1	0.410	1010.7	1012.6	6.6	905.2	1.640
17/4/09	1010.0	180.0	2.3	172.2	0.297	1009.0	1010.8	8.6	938.0	1.960
18/4/09	1008.2	180.0	0.6	146.3	0.245	1006.4	1009.5	10.5	772.8	1.480
19/4/09	1008.5	0.5	0.5	68.1	0.150	1008.2	1010.8	7.7	648.6	1.450
20/4/09	1008.3	315.0	1.0	149.2	0.253	1004.5	1010.8	13.5	930.5	1.810
21/4/09	1001.6	0.0	1.4	71.5	0.162	999.4	1004.5	8.4	524.5	1.110
22/4/09	1004.8	45.0	2.1	174.6	0.291	1003.7	1006.4	13.9	901.7	1.760
23/4/09	1007.3	0.0	0.7	125.9	0.239	1005.8	1009.9	6.2	1029.4	1.860
24/4/09	1011.2	180.0	1.0	314.3	0.454	1009.1	1013.2	7.2	968.5	1.720
25/4/09	1013.7	180.0	0.8	313.4	0.509	1013.1	1014.9	7.0	959.8	1.980
26/4/09	1011.2	0.0	0.4	139.5	0.259	1008.5	1013.2	6.5	893.4	1.840
27/4/09	1002.7	135.0	4.6	84.2	0.161	998.3	1008.7	20.6	490.9	1.170
28/4/09	1002.1	270.0	2.6	135.3	0.262	999.1	1004.6	12.5	951.9	2.060
29/4/09	1006.6	270.0	1.5	220.8	0.415	1004.5	1008.3	11.2	1063.8	2.210
30/4/09	1005.7	180.0	1.4	275.3	0.457	1004.5	1007.3	10.1	1031.4	2.030



**MAGGIO 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin(°C)	Tmax(°C)	Umin(%)	Umax(%)	Tmare(°C)
1/5/09	16.1	60.4	0.0	11.6	21.3	42.2	74.2	16.5
2/5/09	18.8	57.6	2.0	14.5	23.8	36.8	75.4	16.5
3/5/09	15.5	59.0	1.6	12.5	17.6	47.5	76.5	16.7
4/5/09	17.3	56.3	0.0	13.0	22.4	39.5	78.2	16.7
5/5/09	16.9	76.4	0.8	14.9	19.1	54.9	85.9	16.7
6/5/09	18.0	61.6	0.0	14.2	22.4	38.7	78.8	16.8
7/5/09	18.3	77.1	0.0	15.5	21.9	61.1	87.0	16.9
8/5/09	18.7	73.9	0.0	16.6	21.5	44.8	89.1	17.1
9/5/09	19.8	64.3	0.0	15.9	24.9	33.5	77.7	17.5
10/5/09	20.7	61.2	0.0	16.8	26.5	37.3	85.8	17.8
11/5/09	21.8	54.3	0.0	17.5	27.0	27.4	74.5	18.3
12/5/09	21.2	65.4	0.0	17.7	26.2	30.6	82.4	18.6
13/5/09	20.9	64.5	0.0	18.0	24.6	47.0	76.5	18.9
14/5/09	21.5	57.0	0.0	18.6	24.5	33.2	75.9	19.2
15/5/09	23.4	45.8	0.0	19.5	26.6	23.8	76.3	19.3
16/5/09	23.8	50.3	0.0	21.5	26.5	34.8	62.7	19.3
17/5/09	25.0	52.3	0.0	22.0	30.1	32.5	71.2	19.3
18/5/09	23.8	61.3	0.0	20.8	28.3	37.1	80.7	19.4
19/5/09	21.4	82.4	0.0	20.1	23.8	69.4	90.8	19.6
20/5/09	21.7	83.5	0.0	19.9	24.5	72.0	90.3	20.0
21/5/09	23.0	79.4	0.0	20.2	29.6	49.5	91.3	20.3
22/5/09	23.2	74.5	0.0	21.0	25.6	55.2	86.1	20.7
23/5/09	23.7	68.4	0.0	19.9	27.8	41.6	86.1	21.2
24/5/09	23.8	70.0	0.0	20.8	27.6	53.2	79.3	21.6
25/5/09	24.4	74.3	0.0	21.9	27.2	60.5	82.2	21.7
26/5/09	25.2	71.8	0.0	22.9	30.3	50.7	83.6	21.7
27/5/09	24.1	69.3	0.0	22.3	26.4	61.9	78.8	21.8
28/5/09	23.6	65.3	0.0	21.1	26.7	51.8	81.8	21.8
29/5/09	22.8	51.8	0.0	19.7	26.5	41.5	60.7	21.8
30/5/09	19.9	60.0	0.0	16.1	23.4	41.6	77.4	21.8
31/5/09	20.6	76.9	4.6	18.3	23.0	59.5	90.6	21.9

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 11.6 °C il 1/5 alle ore 4.20

Max: 30.3 °C il 26/5 alle ore 16.00

**Umidità**

Min: 23.8 % il 15/5 alle ore 15.0

Max: 91.3 % il 21/5 alle ore 5.30

**Pressione**

Min: 1001.5 hPa il 16/5 alle ore 0.50

Max: 1018.5 hPa il 9/5 alle ore 8.10

**Velocità del vento**

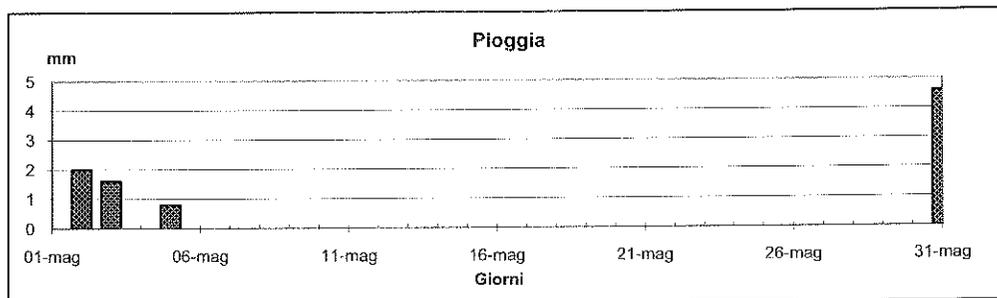
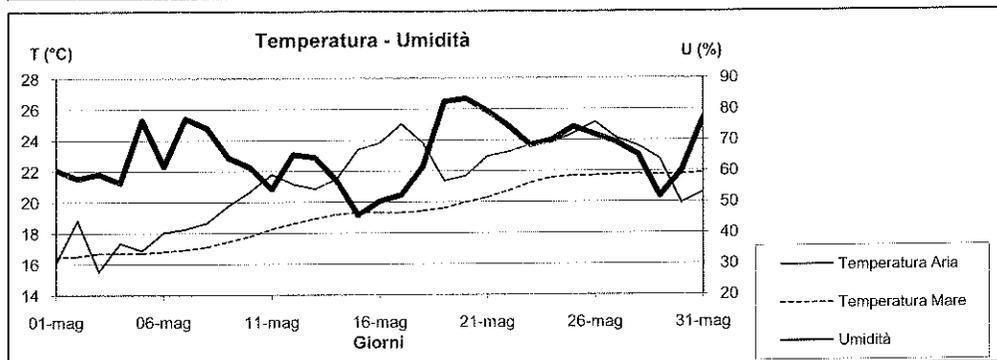
Max: 15.1 m/s il 15/5 alle ore 11.30

**Radiazione totale**

Max: 1056.7 W/m² il 1/5 alle ore 13.40

**Radiazione UVb**

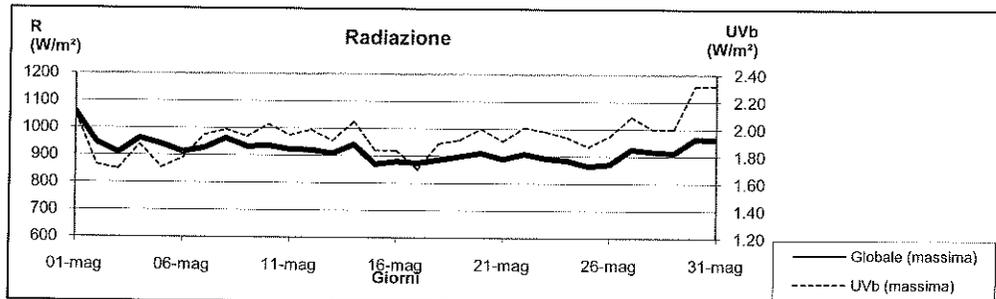
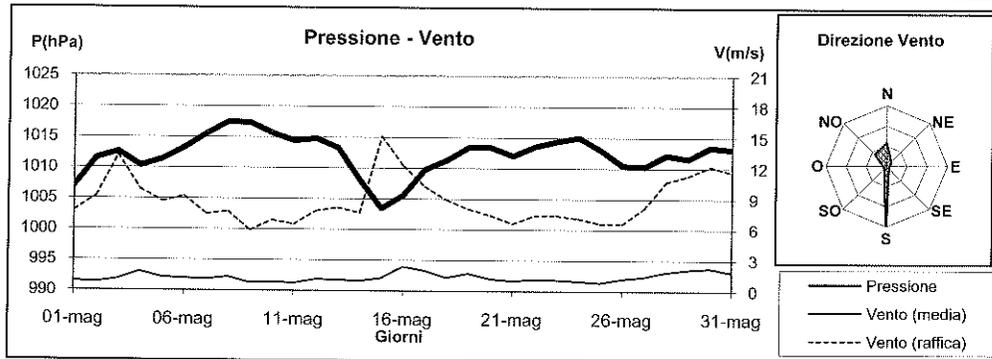
Max: 2.320 W/m² il 30/5 alle ore 12.10



**MAGGIO 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/5/09	1007.0	315.0	0.9	260.8	0.411	1005.3	1010.1	7.8	1056.7	2.100
2/5/09	1011.6	315.0	0.8	245.4	0.380	1010.0	1013.8	9.2	946.7	1.730
3/5/09	1012.6	0.0	1.1	112.0	0.203	1011.3	1013.9	13.2	909.6	1.700
4/5/09	1010.3	0.0	1.9	317.9	0.501	1008.3	1012.0	9.9	963.7	1.880
5/5/09	1011.4	180.0	1.3	236.4	0.402	1010.1	1013.2	8.7	941.6	1.710
6/5/09	1013.3	315.0	1.2	313.3	0.509	1012.5	1014.4	9.2	912.7	1.780
7/5/09	1015.6	180.0	1.1	314.8	0.536	1013.8	1017.4	7.5	927.4	1.950
8/5/09	1017.5	180.0	1.4	324.8	0.540	1016.8	1018.0	7.7	963.0	1.990
9/5/09	1017.3	180.0	0.8	317.1	0.533	1016.1	1018.5	5.9	932.5	1.940
10/5/09	1015.7	180.0	0.9	334.5	0.585	1014.3	1016.8	6.9	936.1	2.030
11/5/09	1014.4	180.0	0.8	327.0	0.545	1013.1	1015.0	6.5	922.6	1.950
12/5/09	1014.8	180.0	1.1	313.2	0.545	1014.3	1015.6	7.8	920.6	1.990
13/5/09	1013.3	180.0	1.1	317.1	0.530	1011.3	1015.4	8.1	908.4	1.910
14/5/09	1008.1	180.0	1.0	301.1	0.522	1005.1	1011.4	7.6	941.2	2.050
15/5/09	1003.4	0.0	1.3	190.3	0.378	1001.9	1005.2	15.1	870.0	1.840
16/5/09	1005.6	0.0	2.4	189.4	0.355	1001.5	1010.1	12.2	879.9	1.840
17/5/09	1009.8	315.0	2.0	249.2	0.436	1008.8	1011.6	10.2	874.4	1.700
18/5/09	1011.3	180.0	1.3	308.7	0.527	1010.0	1012.6	8.9	885.9	1.890
19/5/09	1013.4	180.0	1.7	310.2	0.537	1012.5	1014.4	8.0	898.5	1.920
20/5/09	1013.4	180.0	1.2	319.5	0.547	1011.9	1014.9	7.4	911.2	2.000
21/5/09	1012.1	180.0	1.0	314.7	0.547	1010.6	1013.1	6.6	889.4	1.910
22/5/09	1013.6	180.0	1.1	304.1	0.534	1012.5	1014.4	7.4	908.4	2.010
23/5/09	1014.4	180.0	1.1	309.5	0.546	1013.7	1015.6	7.4	892.2	1.980
24/5/09	1015.0	180.0	1.0	316.3	0.560	1013.8	1015.6	7.1	885.1	1.940
25/5/09	1013.0	180.0	0.9	308.3	0.528	1011.3	1015.0	6.6	864.5	1.870
26/5/09	1010.5	180.0	1.2	312.5	0.551	1008.2	1012.5	6.6	871.2	1.950
27/5/09	1010.3	180.0	1.4	317.8	0.566	1009.4	1012.5	8.1	925.4	2.090
28/5/09	1012.2	45.0	1.9	322.8	0.552	1011.3	1013.8	10.7	917.5	2.000
29/5/09	1011.6	0.0	2.1	329.8	0.565	1009.4	1013.2	11.3	911.6	2.000
30/5/09	1013.5	0.0	2.3	219.6	0.410	1012.0	1014.5	12.2	964.5	2.320
31/5/09	1013.1	180.0	1.9	194.5	0.403	1011.9	1014.1	11.6	963.0	2.320



**GIUGNO 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T <sub>min</sub> (°C)	T <sub>max</sub> (°C)	U <sub>min</sub> (%)	U <sub>max</sub> (%)	T <sub>mare</sub> (°C)
1/6/09	20.6	81.2	9.6	18.4	23.5	65.5	88.6	21.9
2/6/09	18.4	83.0	53.4	16.2	20.6	72.1	90.4	21.6
3/6/09	21.4	57.0	0.0	16.7	25.6	34.5	74.5	21.0
4/6/09	21.4	76.9	0.0	19.5	22.9	64.8	83.3	21.2
5/6/09	21.7	77.4	0.0	20.3	23.4	71.6	85.5	21.6
6/6/09	23.8	57.8	0.0	20.5	27.6	35.1	75.3	22.0
7/6/09	22.8	70.7	0.0	21.1	25.7	44.0	81.7	22.2
8/6/09	22.8	71.9	0.0	19.8	27.0	44.9	86.8	22.3
9/6/09	24.2	61.3	0.0	20.2	28.5	45.6	75.0	22.4
10/6/09	25.1	54.3	0.0	22.1	29.2	31.4	73.5	22.5
11/6/09	23.4	66.6	0.0	20.6	26.9	36.5	82.4	22.7
12/6/09	23.2	72.3	0.0	21.8	25.7	53.7	85.6	22.8
13/6/09	23.5	78.6	0.0	21.5	25.9	67.3	87.7	22.8
14/6/09	24.9	75.0	0.0	22.1	29.0	55.6	85.4	22.9
15/6/09	26.1	71.9	0.0	23.1	30.9	46.9	83.1	23.0
16/6/09	26.4	60.2	0.0	23.5	31.0	38.8	80.8	23.2
17/6/09	26.9	57.2	0.0	23.4	32.0	33.6	75.3	23.3
18/6/09	27.3	55.6	0.0	23.7	30.7	44.3	72.7	23.4
19/6/09	26.1	72.8	0.0	24.5	28.1	61.8	85.6	23.7
20/6/09	25.1	80.1	0.0	24.3	26.1	72.3	85.8	24.2
21/6/09	22.9	69.0	45.8	15.5	25.7	43.9	95.5	24.5
22/6/09	20.5	59.9	5.8	17.0	22.9	44.7	79.3	24.2
23/6/09	19.0	68.7	6.8	17.0	22.3	55.5	80.1	23.6
24/6/09	20.2	65.2	7.4	16.8	23.4	48.1	77.0	23.1
25/6/09	22.2	72.2	0.0	19.4	25.3	58.8	83.2	22.8
26/6/09	22.9	73.3	0.0	21.4	24.5	66.5	81.7	22.8
27/6/09	23.2	74.9	0.0	21.4	24.9	66.9	80.7	22.9
28/6/09	22.7	75.6	27.8	19.7	25.5	63.0	82.2	23.1
29/6/09	22.5	79.8	11.8	20.1	26.1	68.3	87.6	23.5
30/6/09	23.9	76.4	0.0	20.8	27.2	60.3	87.3	23.6

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 15.5 °C il 21/6 alle ore 3.40

Max: 32 °C il 17/6 alle ore 14.30

**Umidità**

Min: 31.4 % il 10/6 alle ore 18.10

Max: 95.5 % il 21/6 alle ore 6.40

**Pressione**

Min: 1000.0 hPa il 21/6 alle ore 3.30

Max: 1016.9 hPa il 15/6 alle ore 8.10

**Velocità del vento**

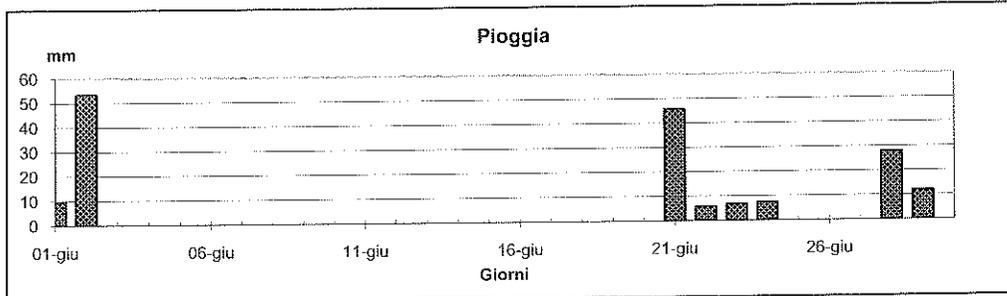
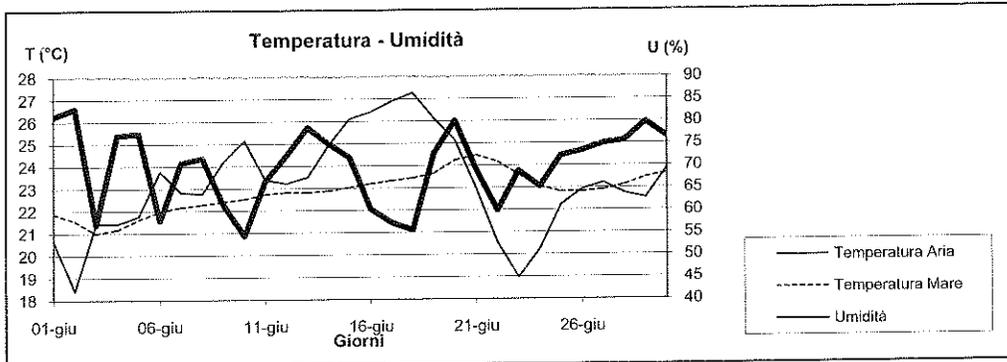
Max: 23.1 m/s il 21/6 alle ore 3.30

**Radiazione totale**

Max: 1063.8 W/m<sup>2</sup> il 24/6 alle ore 10.00

**Radiazione UVb**

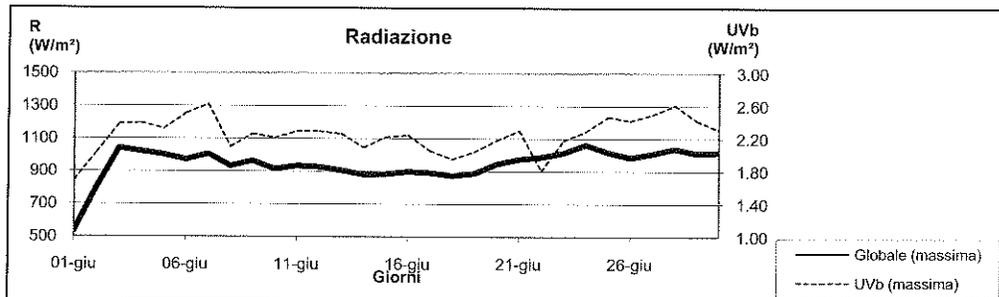
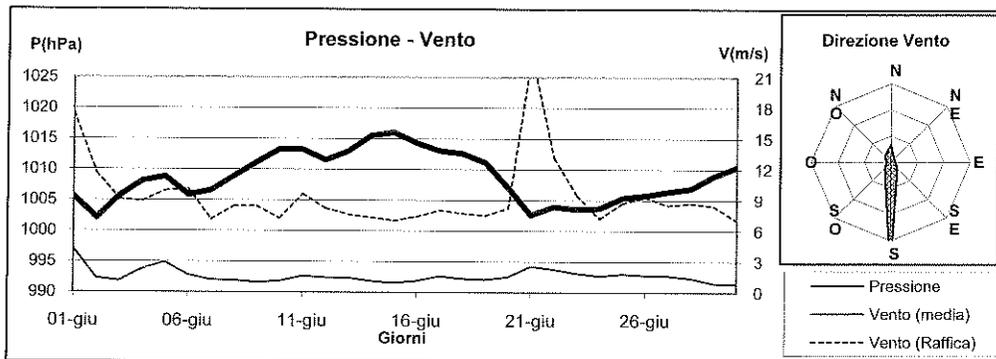
Max: 2.620 W/m<sup>2</sup> il 7/6 alle ore 12.20



**GIUGNO 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/6/09	1005.6	135.0	4.2	69.0	0.176	1001.7	1012.0	17.5	532.8	1.690
2/6/09	1002.1	225.0	1.4	91.5	0.220	1000.9	1003.9	11.6	801.6	2.030
3/6/09	1005.7	315.0	1.1	337.7	0.654	1003.9	1007.8	9.1	1041.6	2.380
4/6/09	1008.1	180.0	2.3	283.8	0.520	1007.0	1009.5	8.9	1020.7	2.390
5/6/09	1008.8	180.0	2.9	333.9	0.650	1007.7	1010.0	9.9	1001.3	2.320
6/6/09	1005.8	180.0	1.7	285.8	0.587	1004.5	1008.2	10.1	972.1	2.510
7/6/09	1006.6	180.0	1.2	259.6	0.516	1005.4	1008.2	7.1	1006.4	2.620
8/6/09	1008.9	180.0	1.2	345.0	0.618	1007.6	1010.7	8.4	932.1	2.100
9/6/09	1011.2	180.0	1.0	325.4	0.603	1009.5	1013.2	8.4	964.5	2.260
10/6/09	1013.3	180.0	1.1	326.3	0.628	1012.0	1014.7	7.2	915.1	2.210
11/6/09	1013.2	180.0	1.6	345.3	0.654	1011.9	1014.4	9.6	934.9	2.290
12/6/09	1011.5	180.0	1.4	333.3	0.656	1010.7	1012.6	8.2	927.4	2.290
13/6/09	1013.0	180.0	1.4	338.3	0.658	1011.4	1014.4	7.6	906.4	2.260
14/6/09	1015.5	180.0	1.1	299.5	0.589	1014.4	1016.8	7.3	880.7	2.090
15/6/09	1016.0	180.0	0.9	321.1	0.624	1014.9	1016.9	7.0	887.7	2.220
16/6/09	1014.3	180.0	1.1	326.2	0.642	1013.0	1015.5	7.4	898.9	2.240
17/6/09	1013.0	180.0	1.6	328.9	0.610	1011.8	1014.3	8.0	890.2	2.050
18/6/09	1012.6	180.0	1.3	314.2	0.564	1011.3	1013.2	7.7	873.2	1.950
19/6/09	1011.2	180.0	1.3	322.5	0.589	1009.3	1012.5	7.5	888.2	2.040
20/6/09	1007.0	180.0	1.5	211.3	0.420	1005.1	1010.1	8.2	946.4	2.180
21/6/09	1002.6	180.0	2.6	341.4	0.654	1000.0	1005.0	23.1	975.2	2.300
22/6/09	1003.9	0.0	2.3	159.8	0.298	1002.2	1005.7	13.1	987.9	1.810
23/6/09	1003.5	0.0	1.9	206.2	0.407	1002.0	1005.1	9.5	1013.6	2.180
24/6/09	1003.7	0.0	1.6	230.8	0.433	1002.5	1005.3	7.2	1063.8	2.290
25/6/09	1005.4	180.0	1.8	287.2	0.569	1004.6	1006.3	8.7	1016.3	2.470
26/6/09	1005.8	180.0	1.7	331.1	0.673	1005.1	1006.4	9.3	985.9	2.420
27/6/09	1006.4	180.0	1.6	318.6	0.657	1005.7	1007.0	8.5	1008.8	2.500
28/6/09	1006.9	180.0	1.4	259.7	0.543	1005.7	1008.5	8.7	1040.1	2.610
29/6/09	1008.9	180.0	0.9	260.3	0.531	1007.6	1010.1	8.4	1010.4	2.420
30/6/09	1010.4	180.0	0.8	267.2	0.546	1009.4	1011.9	7.0	1017.1	2.310



**LUGLIO 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/7/09	24.6	75.6	2.4	22.3	27.4	61.3	82.2	23.8
2/7/09	24.9	76.1	0.0	22.5	27.2	63.1	86.3	23.8
3/7/09	25.3	71.7	0.0	22.5	28.5	56.9	79.2	23.9
4/7/09	26.0	75.2	0.0	24.1	28.8	57.1	85.8	24.0
5/7/09	25.8	74.5	0.0	24.4	28.4	59.3	83.8	24.1
6/7/09	25.8	74.7	0.0	23.6	27.6	65.6	81.5	24.4
7/7/09	26.3	78.5	0.0	25.0	28.3	67.1	85.3	24.7
8/7/09	26.5	70.7	0.0	24.7	29.1	48.3	85.8	25.3
9/7/09	25.4	55.5	0.0	23.5	27.4	40.8	66.4	25.7
10/7/09	24.0	65.1	0.0	22.4	26.0	56.9	72.1	25.7
11/7/09	24.4	61.4	0.0	21.5	27.7	47.9	73.0	25.3
12/7/09	25.3	52.6	0.0	21.5	28.5	25.7	74.6	25.0
13/7/09	26.0	62.4	0.0	23.0	29.9	36.1	77.7	25.1
14/7/09	27.1	63.3	0.0	23.7	30.5	50.0	78.2	25.1
15/7/09	28.3	57.4	0.0	25.0	32.1	36.5	73.6	
16/7/09	28.7	54.4	0.0	25.0	34.8	37.7	72.1	
17/7/09	27.7	71.1	0.0	24.9	31.3	50.2	84.7	
18/7/09	24.8	68.9	0.0	22.7	26.7	50.0	86.5	25.0
19/7/09	24.2	62.3	0.0	21.3	27.8	43.2	75.1	24.9
20/7/09	24.4	64.2	0.0	21.0	28.2	41.1	77.9	24.5
21/7/09	25.7	66.9	0.0	21.8	30.1	44.9	81.5	24.3
22/7/09	26.5	69.4	0.0	23.7	31.1	47.0	81.7	24.1
23/7/09	26.7	75.7	0.0	24.1	29.1	67.1	87.3	24.1
24/7/09	28.5	53.4	0.0	24.7	32.4	28.8	78.2	24.2
25/7/09	28.2	58.3	0.0	25.9	31.7	38.3	77.9	24.3
26/7/09	29.1	45.9	0.0	24.6	33.5	25.5	78.3	24.5
27/7/09	28.3	39.5	0.0	25.0	31.8	27.6	63.7	24.5
28/7/09	27.6	52.3	0.0	24.5	32.5	26.5	75.7	24.5
29/7/09	28.0	50.7	0.0	24.2	32.7	37.2	69.4	24.5
30/7/09	27.9	66.3	0.0	25.8	31.4	45.8	84.5	24.5
31/7/09	27.7	66.9	0.0	25.3	31.6	42.7	85.8	24.5

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 21.0 °C il 20/7 alle ore 4.40  
 Max: 34.8 °C il 16/7 alle ore 14.00

**Umidità**

Min: 25.5 % il 26/7 alle ore 14.20  
 Max: 87.3 % il 23/7 alle ore 20.50

**Pressione**

Min: 1002.9 hPa il 5/7 alle ore 20.00  
 Max: 1015.6 hPa il 19/7 alle ore 23.00

**Velocità del vento**

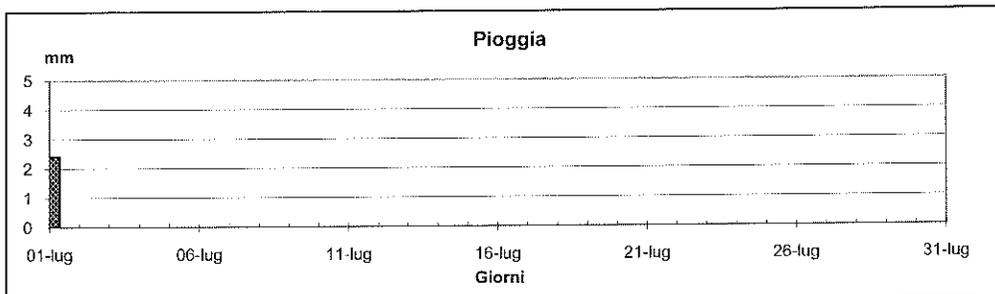
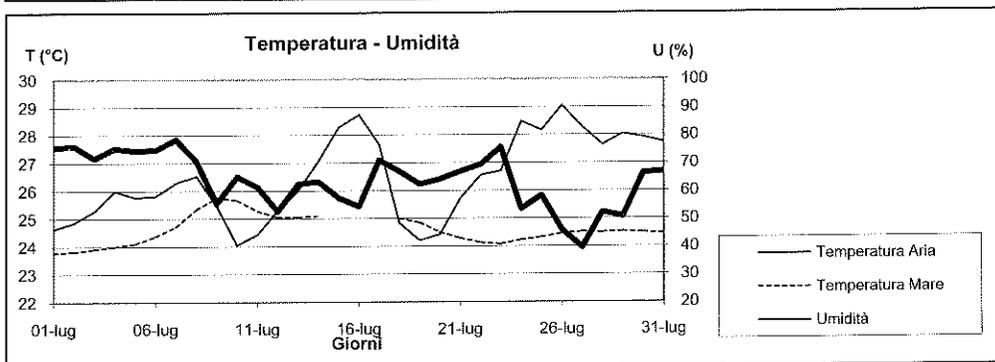
Max: 13.8 m/s il 18/7 alle ore 12.30

**Radiazione totale**

Max: 1012.8 W/m<sup>2</sup> il 9/7 alle ore 13.10

**Radiazione UVb**

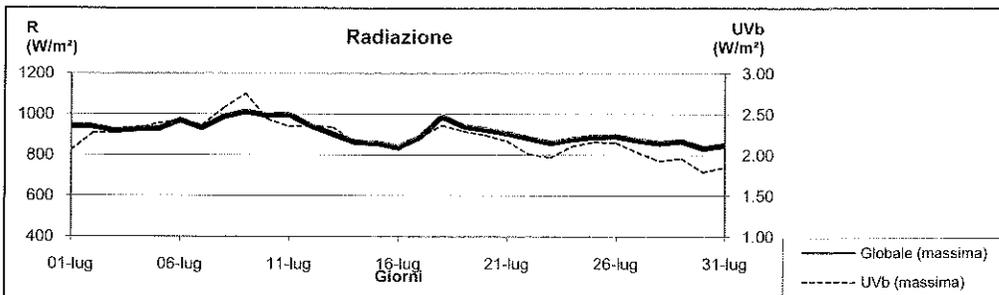
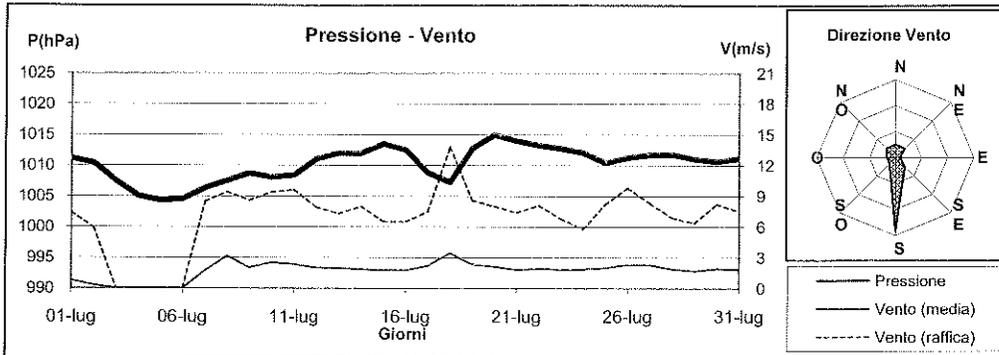
Max: 2.750 W/m<sup>2</sup> il 9/7 alle ore 12.20



**LUGLIO 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/7/09	1011.2	180.0	0.8	230.3	0.451	1010.5	1012.2	7.4	941.2	2.060
2/7/09	1010.4		0.3	314.4	0.616	1008.9	1012.0	5.9	939.2	2.270
3/7/09	1007.5		0.0	308.4	0.613	1005.7	1009.5	0.0	917.9	2.270
4/7/09	1005.1		0.0	318.8	0.660	1003.3	1006.4	0.0	926.2	2.320
5/7/09	1004.3		0.0	325.6	0.673	1002.9	1005.7	0.0	928.2	2.390
6/7/09	1004.6		0.0	330.7	0.680	1003.8	1005.7	0.0	970.5	2.420
7/7/09	1006.3	180.0	1.7	330.3	0.674	1005.1	1007.6	8.5	932.1	2.370
8/7/09	1007.5	180.0	3.2	305.8	0.630	1006.3	1009.5	9.4	987.5	2.580
9/7/09	1008.7	225.0	2.0	284.4	0.582	1008.1	1009.5	8.6	1012.8	2.750
10/7/09	1008.1	180.0	2.5	294.9	0.616	1007.2	1008.9	9.4	993.4	2.440
11/7/09	1008.4	315.0	2.3	337.5	0.637	1007.5	1010.7	9.6	997.4	2.350
12/7/09	1011.1	0.0	2.0	339.1	0.680	1010.6	1012.3	7.9	941.6	2.360
13/7/09	1012.0	180.0	2.0	323.3	0.666	1010.9	1013.0	7.3	902.1	2.340
14/7/09	1012.0	180.0	1.9	316.8	0.628	1011.3	1013.2	8.0	862.9	2.160
15/7/09	1013.5	180.0	1.8	305.8	0.592	1012.5	1014.4	6.5	857.8	2.120
16/7/09	1012.5	135.0	1.8	306.9	0.598	1010.6	1014.0	6.5	838.4	2.060
17/7/09	1008.8	180.0	2.2	320.7	0.634	1006.4	1011.4	7.5	888.6	2.220
18/7/09	1007.3	270.0	3.4	324.8	0.641	1005.1	1010.7	13.8	987.9	2.360
19/7/09	1012.8	315.0	2.3	337.5	0.648	1010.7	1015.6	8.6	939.2	2.290
20/7/09	1015.0	135.0	2.1	334.4	0.644	1014.3	1015.6	8.0	924.2	2.240
21/7/09	1014.0	45.0	1.8	315.7	0.593	1013.0	1015.0	7.4	906.4	2.170
22/7/09	1013.3	180.0	1.9	315.4	0.593	1012.5	1013.8	8.1	881.9	2.010
23/7/09	1012.7	180.0	1.9	304.9	0.563	1012.0	1013.2	6.8	859.4	1.970
24/7/09	1012.1	180.0	1.9	307.0	0.593	1011.2	1013.1	5.8	877.6	2.110
25/7/09	1010.4	180.0	2.0	316.6	0.606	1009.4	1011.5	8.2	889.0	2.160
26/7/09	1011.3	45.0	2.4	312.7	0.608	1010.6	1013.2	9.8	892.2	2.150
27/7/09	1011.7	0.0	2.3	313.8	0.581	1010.1	1013.2	8.3	872.0	2.030
28/7/09	1011.8	180.0	1.9	298.5	0.534	1010.6	1012.6	6.9	857.8	1.930
29/7/09	1011.0	180.0	1.7	303.8	0.539	1009.4	1012.6	6.4	868.9	1.960
30/7/09	1010.6	180.0	1.9	295.0	0.508	1010.0	1011.4	8.2	832.5	1.790
31/7/09	1011.1	180.0	1.9	288.2	0.508	1010.0	1011.8	7.5	847.9	1.850



**AGOSTO 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T <sub>min</sub> (°C)	T <sub>max</sub> (°C)	U <sub>min</sub> (%)	U <sub>max</sub> (%)	T <sub>mare</sub> (°C)
1/8/09	27.1	70.0	0.0	24.4	30.3	51.7	85.6	24.5
2/8/09	26.9	72.0	0.0	23.8	29.9	55.9	82.4	24.6
3/8/09	26.8	71.8	0.0	24.6	29.3	51.2	81.9	25.1
4/8/09	25.7	68.7	0.0	24.2	28.2	51.8	80.3	25.4
5/8/09	26.7	53.6	0.0	23.2	30.5	37.3	66.3	25.6
6/8/09	27.2	52.3	0.0	24.0	30.3	41.7	62.6	25.5
7/8/09	28.0	50.5	0.0	24.5	31.0	38.2	64.3	25.3
8/8/09	27.1	62.4	0.0	25.0	29.4	48.8	80.3	25.2
9/8/09	26.4	76.6	0.0	24.3	28.2	68.6	83.6	25.2
10/8/09	26.7	76.1	0.0	24.4	28.6	67.8	81.7	25.1
11/8/09	27.1	75.3	0.0	25.1	29.8	58.0	86.1	25.1
12/8/09	28.3	57.1	0.0	24.9	32.1	30.9	78.4	25.1
13/8/09	27.7	60.7	0.0	26.0	29.9	42.6	82.2	25.3
14/8/09	27.5	68.4	0.0	24.8	30.9	50.5	82.9	25.4
15/8/09	29.0	54.8	0.0	25.4	32.8	37.7	74.3	25.5
16/8/09	29.3	44.9	0.0	25.9	33.2	31.8	68.0	25.6
17/8/09	29.2	56.5	0.0	26.1	33.2	45.8	68.0	25.8
18/8/09	28.5	67.1	0.0	26.1	31.2	52.7	77.9	26.0
19/8/09	29.7	50.0	0.0	26.0	34.7	30.9	75.2	26.1
20/8/09	30.9	40.1	0.0	27.1	35.4	29.3	51.6	26.1
21/8/09	30.3	38.0	0.0	26.8	34.4	26.8	57.1	26.1
22/8/09	28.0	71.7	0.0	26.2	30.3	52.1	84.2	26.1
23/8/09	27.6	70.6	0.4	25.8	30.2	51.0	86.0	26.3
24/8/09	27.8	62.9	0.0	25.8	30.6	40.8	86.1	26.5
25/8/09	27.7	72.0	0.0	25.6	30.0	45.0	86.8	26.6
26/8/09	28.6	59.9	0.0	25.0	32.3	35.0	74.9	26.7
27/8/09	28.4	66.4	0.0	25.8	32.0	43.3	78.6	26.8
28/8/09	28.4	66.3	0.0	25.1	32.6	39.0	79.3	26.9
29/8/09	27.7	73.4	0.0	25.7	31.4	54.8	83.6	27.0
30/8/09	27.6	68.8	0.0	25.7	31.3	54.2	79.6	27.0
31/8/09	27.6	62.8	0.0	24.7	30.5	49.3	78.9	27.0

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 23.2 °C il 5/8 alle ore 5.20  
 Max: 35.4 °C il 20/8 alle ore 15.00

**Umidità**

Min: 26.8 % il 21/8 alle ore 14.40  
 Max: 86.8 % il 25/8 alle ore 0.40

**Pressione**

Min: 1006.2 hPa il 24/8 alle ore 16.00  
 Max: 1014.4 hPa il 19/8 alle ore 23.20

**Velocità del vento**

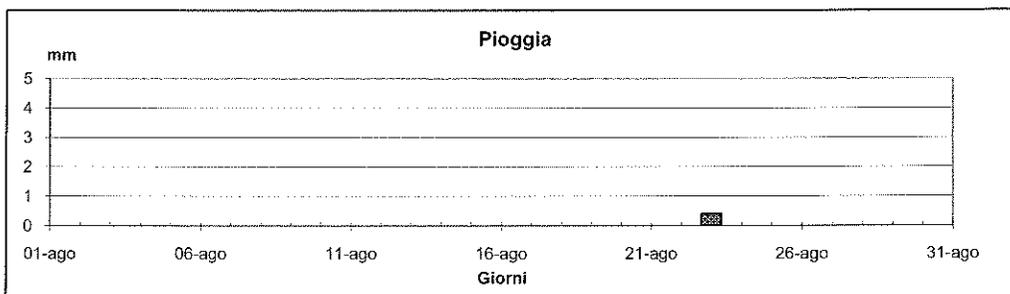
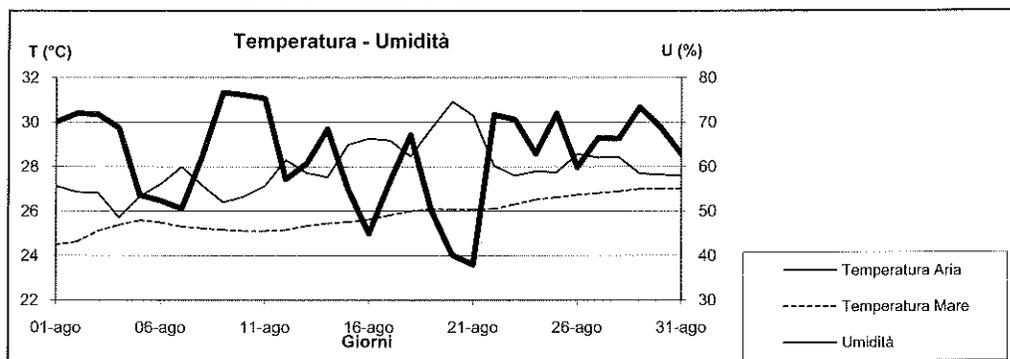
Max: 11.7 m/s il 30/8 alle ore 17.50

**Radiazione totale**

Max: 942.8 W/m<sup>2</sup> il 4/8 alle ore 11.40

**Radiazione UVb**

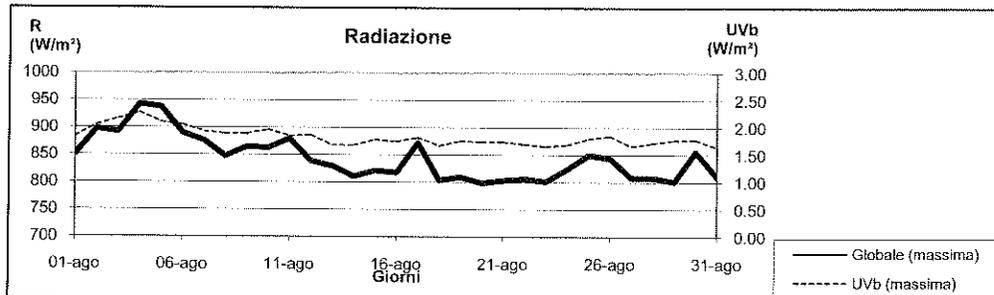
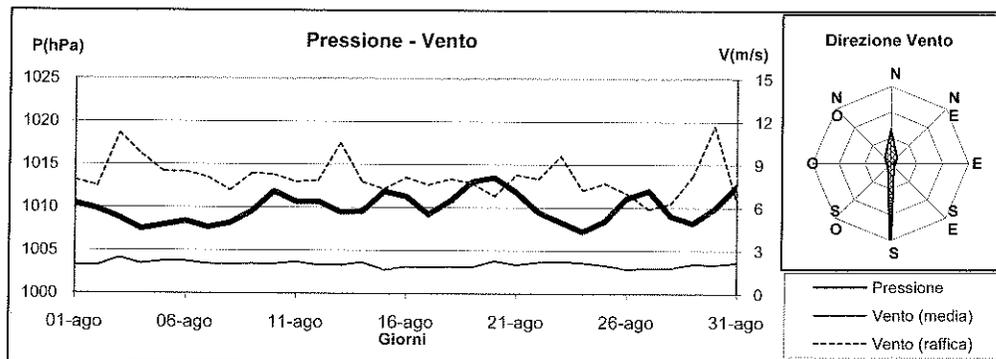
Max: 2.270 W/m<sup>2</sup> il 4/8 alle ore 11.40



**AGOSTO 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/8/09	1010.5	180.0	2.0	298.8	0.520	1008.8	1011.4	7.9	850.7	1.840
2/8/09	1009.8	180.0	1.9	314.6	0.580	1009.2	1010.3	7.5	897.3	2.050
3/8/09	1008.8	180.0	2.5	258.2	0.504	1007.6	1010.2	11.2	892.6	2.160
4/8/09	1007.5	180.0	2.1	274.8	0.501	1006.3	1008.9	9.7	942.8	2.270
5/8/09	1008.0	45.0	2.2	257.9	0.479	1006.9	1009.5	8.5	937.7	2.100
6/8/09	1008.4	0.0	2.3	273.0	0.495	1007.4	1009.5	8.5	890.2	2.050
7/8/09	1007.7	315.0	2.1	279.3	0.495	1006.3	1009.0	8.1	876.4	1.930
8/8/09	1008.2	180.0	2.0	295.0	0.529	1007.0	1009.5	7.2	847.5	1.890
9/8/09	1009.5	180.0	2.1	291.3	0.518	1008.9	1011.3	8.4	864.9	1.890
10/8/09	1011.9	180.0	2.1	293.3	0.530	1011.2	1012.5	8.3	862.5	1.960
11/8/09	1010.7	180.0	2.2	289.3	0.490	1008.8	1012.1	7.8	879.9	1.850
12/8/09	1010.7	0.0	2.0	283.9	0.501	1009.4	1011.6	7.9	838.8	1.860
13/8/09	1009.5	180.0	2.0	268.2	0.449	1008.2	1010.7	10.5	829.7	1.680
14/8/09	1009.6	180.0	2.2	281.1	0.468	1008.4	1011.7	7.8	810.3	1.580
15/8/09	1011.9	180.0	1.7	272.9	0.474	1010.6	1013.1	7.3	821.4	1.780
16/8/09	1011.3	180.0	1.9	271.3	0.437	1009.4	1012.8	8.1	817.5	1.750
17/8/09	1009.2	180.0	1.9	264.5	0.447	1007.5	1010.7	7.6	872.4	1.820
18/8/09	1010.8	180.0	1.9	273.2	0.459	1009.5	1013.1	8.0	803.6	1.670
19/8/09	1013.0	0.0	1.9	269.0	0.456	1011.8	1014.4	7.7	809.5	1.760
20/8/09	1013.5	0.0	2.3	263.4	0.453	1011.8	1014.4	6.8	798.9	1.740
21/8/09	1011.8	0.0	2.0	270.3	0.464	1010.0	1013.7	8.3	803.2	1.740
22/8/09	1009.5	180.0	2.2	266.0	0.453	1008.2	1011.3	8.0	806.4	1.700
23/8/09	1008.3	180.0	2.3	219.4	0.392	1006.9	1009.5	9.6	801.6	1.660
24/8/09	1007.2	180.0	2.2	267.9	0.445	1006.2	1008.2	7.2	824.6	1.690
25/8/09	1008.4	180.0	2.0	279.1	0.476	1007.0	1010.1	7.7	849.9	1.800
26/8/09	1011.1	180.0	1.7	276.1	0.486	1010.1	1013.1	7.0	843.9	1.850
27/8/09	1012.0	0.0	1.8	255.5	0.432	1010.0	1013.1	5.9	808.0	1.660
28/8/09	1009.0	180.0	1.8	265.0	0.447	1007.4	1010.7	6.3	808.4	1.720
29/8/09	1008.2	180.0	2.1	259.3	0.455	1006.9	1009.1	8.2	800.8	1.770
30/8/09	1009.9	180.0	2.0	256.7	0.437	1008.2	1012.0	11.7	855.8	1.780
31/8/09	1012.5	0.0	2.2	256.1	0.426	1010.2	1013.8	6.4	810.7	1.640



**SETTEMBRE 2009** (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tinare (°C)
1/9/09	27.5	68.7	0.0	25.0	29.8	33.4	78.9	
2/9/09	27.1	69.1	0.0	25.4	29.1	53.5	80.5	
3/9/09	26.8	74.0	0.0	24.6	28.9	67.3	79.2	
4/9/09	27.3	76.1	0.4	25.9	29.4	38.6	80.8	
5/9/09	26.8	63.2	0.0	24.7	29.2	50.4	77.4	
6/9/09	25.0	51.2	0.0	21.9	28.5	37.1	69.4	
7/9/09	23.5	38.0	0.0	21.0	27.3	25.1	49.2	
8/9/09	23.3	40.5	0.0	19.8	27.5	27.3	55.6	
9/9/09	23.6	43.5	0.0	20.2	27.5	27.4	54.6	25.1
10/9/09	24.1	44.7	0.0	20.9	28.9	23.4	58.6	24.5
11/9/09	24.9	48.2	0.0	21.2	29.7	31.3	62.6	24.1
12/9/09	24.4	47.3	0.0	21.6	27.9	38.3	56.9	23.8
13/9/09	23.5	58.2	0.0	21.2	26.2	43.8	68.1	23.7
14/9/09	22.1	71.8	25.8	18.7	25.0	64.5	83.5	23.5
15/9/09	23.5	70.1	14.6	19.7	26.1	56.1	87.4	23.3
16/9/09	22.9	72.4	26.0	18.5	25.5	51.8	88.8	23.2
17/9/09	22.2	75.9	13.4	17.4	24.9	64.4	86.9	23.0
18/9/09	23.5	72.7	0.0	20.4	26.7	54.6	85.7	23.2
19/9/09	23.7	71.2	0.0	21.4	26.4	52.0	81.1	23.6
20/9/09	22.1	75.0	8.0	18.8	25.1	63.4	87.8	23.8
21/9/09	21.6	76.7	1.2	19.7	23.4	63.3	88.2	23.9
22/9/09	22.9	64.2	0.0	19.8	26.5	48.5	77.5	23.7
23/9/09	24.1	59.2	0.0	21.0	27.6	45.3	71.1	23.7
24/9/09	21.6	71.5	3.6	19.6	23.5	62.8	83.9	23.9
25/9/09	22.2	63.2	0.4	19.5	25.4	46.9	75.6	23.6
26/9/09	24.2	55.6	0.0	21.9	27.3	44.5	69.0	23.6
27/9/09	24.3	52.7	0.0	21.4	27.5	42.5	63.7	23.6
28/9/09	23.8	59.2	0.0	21.6	26.8	45.6	68.3	23.7
29/9/09	23.1	68.5	0.0	20.4	26.0	56.6	80.6	23.7
30/9/09	22.6	76.2	0.0	20.5	25.3	59.4	84.1	23.8

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 17.4 °C il 17/9 alle ore 1.0  
 Max: 29.8 °C il 1/9 alle ore 14.10

**Umidità**

Min: 23.4 % il 10/9 alle ore 14.20  
 Max: 88.8 % il 16/9 alle ore 10.0

**Pressione**

Min: 1005.7 hPa il 13/9 alle ore 15.50  
 Max: 1018.0 hPa il 22/9 alle ore 20.40

**Velocità del vento**

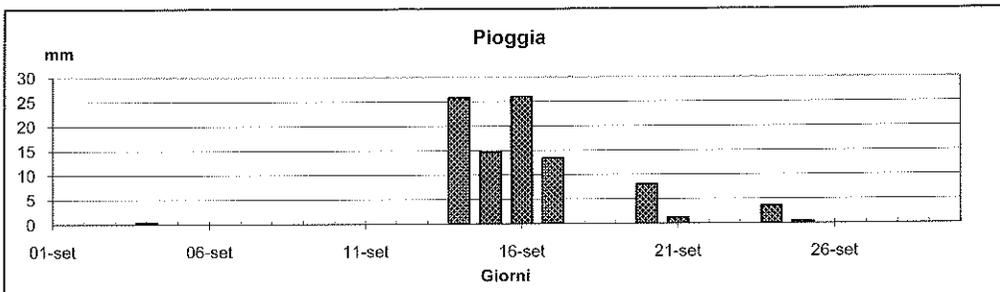
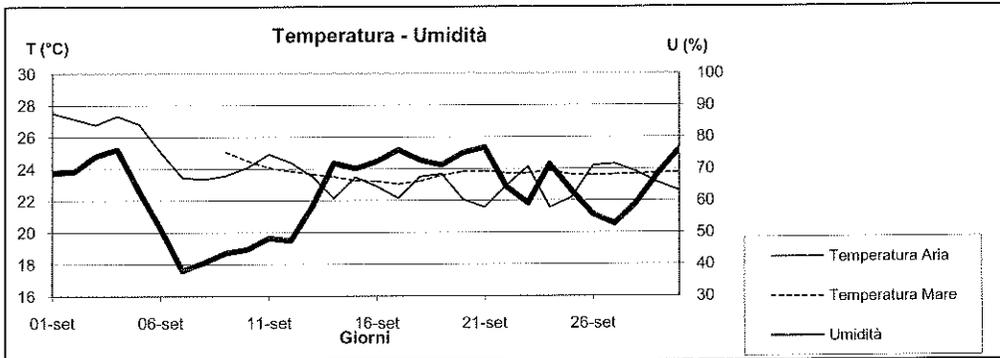
Max: 17.2 m/s il 17/9 alle ore 0.20

**Radiazione totale**

Max: 938.8 W/m<sup>2</sup> il 20/9 alle ore 12.30

**Radiazione UVb**

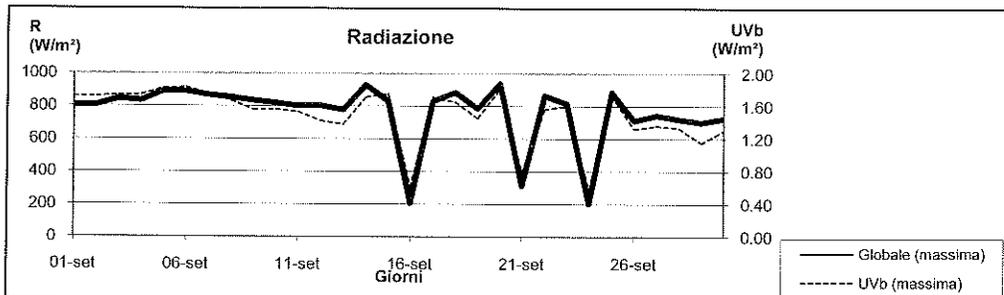
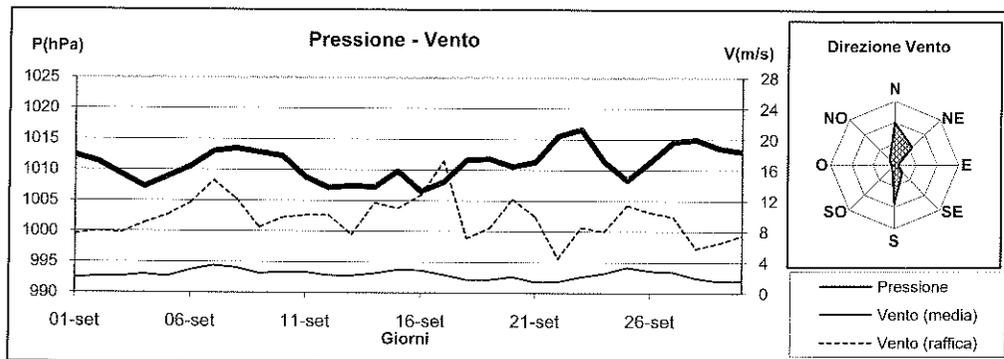
Max: 1.830 W/m<sup>2</sup> il 6/9 alle ore 12.10



## SETTEMBRE 2009

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/9/09	1012.4	180.0	1.9	255.7	0.437	1010.2	1014.3	7.6	803.2	1.720
2/9/09	1011.3	180.0	2.1	247.8	0.428	1009.9	1013.1	8.0	806.4	1.720
3/9/09	1009.2	180.0	2.1	237.8	0.387	1008.2	1010.7	7.8	845.9	1.730
4/9/09	1007.2	135.0	2.4	210.9	0.384	1006.7	1008.8	9.1	833.3	1.740
5/9/09	1008.9	315.0	2.1	203.7	0.382	1008.2	1010.1	10.1	893.4	1.820
6/9/09	1010.5	45.0	3.0	249.0	0.418	1009.4	1012.7	11.7	891.4	1.830
7/9/09	1013.0	45.0	3.5	276.3	0.451	1011.9	1014.4	14.6	868.5	1.750
8/9/09	1013.5	45.0	3.3	264.3	0.420	1011.9	1014.4	12.2	855.0	1.670
9/9/09	1012.9	0.0	2.5	231.0	0.356	1011.9	1013.9	8.5	835.6	1.560
10/9/09	1012.2	0.0	2.7	237.2	0.372	1010.1	1013.9	9.8	819.8	1.560
11/9/09	1008.8	0.0	2.7	231.0	0.362	1006.3	1011.4	10.1	802.8	1.530
12/9/09	1007.1	0.0	2.3	242.4	0.350	1005.7	1008.3	10.1	803.6	1.420
13/9/09	1007.4	0.0	2.2	234.1	0.351	1005.7	1008.3	7.6	777.9	1.380
14/9/09	1007.2	135.0	2.5	179.9	0.286	1005.7	1009.8	11.7	929.7	1.710
15/9/09	1009.8	180.0	3.0	231.2	0.399	1007.8	1011.4	11.0	832.1	1.750
16/9/09	1006.5	180.0	2.9	43.7	0.113	1003.6	1008.5	12.7	206.6	0.610
17/9/09	1008.0	180.0	2.4	219.8	0.383	1005.8	1011.3	17.2	830.5	1.710
18/9/09	1011.6	180.0	1.7	243.6	0.394	1010.7	1012.6	7.1	884.7	1.650
19/9/09	1011.8	180.0	1.7	210.6	0.343	1010.7	1012.5	8.4	785.0	1.450
20/9/09	1010.5	180.0	2.1	194.1	0.327	1008.8	1012.0	12.2	938.8	1.810
21/9/09	1011.3	0.0	1.4	54.5	0.129	1009.7	1013.8	9.9	313.3	0.790
22/9/09	1015.5	0.0	1.5	139.1	0.261	1013.7	1018.0	4.5	865.7	1.560
23/9/09	1016.6	0.0	2.1	206.6	0.336	1014.7	1018.0	8.5	815.1	1.600
24/9/09	1011.4	0.0	2.5	33.6	0.104	1008.9	1014.4	8.0	202.6	0.570
25/9/09	1008.3	45.0	3.4	183.1	0.318	1007.1	1010.5	11.4	885.9	1.730
26/9/09	1011.3	45.0	2.9	150.8	0.274	1009.5	1014.3	10.5	712.7	1.320
27/9/09	1014.6	0.0	2.7	191.3	0.307	1013.7	1016.2	9.9	744.7	1.360
28/9/09	1014.9	0.0	1.9	208.9	0.316	1013.7	1015.6	5.8	720.6	1.330
29/9/09	1013.6	45.0	1.5	200.9	0.283	1011.9	1015.0	6.5	701.2	1.150
30/9/09	1013.0	180.0	1.5	204.9	0.304	1011.9	1013.7	7.5	725.7	1.300



**OTTOBRE 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin(°C)	Tmax(°C)	Unin(%)	Umax(%)	Tmare(°C)
1/10/09	22.1	76.7	0.0	19.5	23.9	64.9	86.0	23.7
2/10/09	20.8	78.6	1.0	19.8	22.1	73.2	82.8	23.6
3/10/09	21.7	56.4	0.0	18.7	25.7	37.5	79.5	23.3
4/10/09	21.2	62.4	0.0	18.4	24.0	45.6	75.0	23.2
5/10/09	21.9	72.9	0.0	19.0	24.7	60.2	83.5	23.2
6/10/09	21.9	74.2	0.0	20.0	25.3	56.9	81.6	23.3
7/10/09	21.7	77.1	0.0	18.8	25.1	62.4	84.1	23.3
8/10/09	22.3	78.2	0.0	20.7	25.0	68.7	85.2	23.3
9/10/09	22.0	79.1	0.0	19.5	24.4	70.5	87.3	23.4
10/10/09	22.2	79.4	19.8	18.9	23.8	71.2	85.5	23.4
11/10/09	20.5	81.2	0.0	18.8	22.4	72.9	87.6	23.2
12/10/09	20.2	79.2	35.4	14.3	23.6	65.3	90.6	23.1
13/10/09	16.1	46.2	0.0	13.8	19.5	29.6	65.7	22.7
14/10/09	14.0	49.7	0.0	11.5	17.4	37.6	60.4	22.3
15/10/09	12.8	52.5	0.0	10.5	15.0	43.5	61.2	21.6
16/10/09	14.4	49.4	0.0	11.6	18.0	32.5	60.5	21.0
17/10/09	13.5	65.7	3.8	12.1	16.6	52.8	80.9	20.7
18/10/09	12.4	68.2	3.4	11.1	13.7	59.4	82.1	20.3
19/10/09	13.6	55.5	0.0	10.8	17.5	41.9	67.3	19.9
20/10/09	14.0	63.2	1.4	10.6	17.4	42.7	79.0	19.7
21/10/09	17.9	57.1	0.0	13.4	22.5	40.8	69.8	19.6
22/10/09	19.7	84.5	38.0	17.1	21.8	67.2	91.7	19.8
23/10/09	17.9	85.7	16.6	16.5	22.9	74.7	92.7	19.8
24/10/09	18.0	77.4	3.6	15.6	20.6	63.8	88.1	19.7
25/10/09	19.2	63.3	0.0	16.9	22.1	51.5	74.4	19.6
26/10/09	19.4	67.6	0.0	16.2	23.9	52.3	81.6	19.6
27/10/09	19.3	64.7	0.0	16.7	22.9	50.8	76.3	19.7
28/10/09	18.3	56.2	0.0	15.5	22.5	38.2	70.3	19.8
29/10/09	17.2	66.3	0.0	13.8	21.2	51.1	81.6	19.7
30/10/09	17.2	58.7	0.0	14.0	21.4	40.9	83.4	19.6
31/10/09	14.7	49.6	0.0	12.1	17.8	35.7	59.4	19.5

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 10.5 °C il 15/10 alle ore 4.20

Max: 25.7 °C il 3/10 alle ore 12.30

**Umidità**

Min: 29.6 % il 13/10 alle ore 14.10

Max: 92.7 % il 23/10 alle ore 5.30

**Pressione**

Min: 992.9 hPa il 23/10 alle ore 15.30

Max: 1019.2 hPa il 6/10 alle ore 9.40

**Velocità del vento**

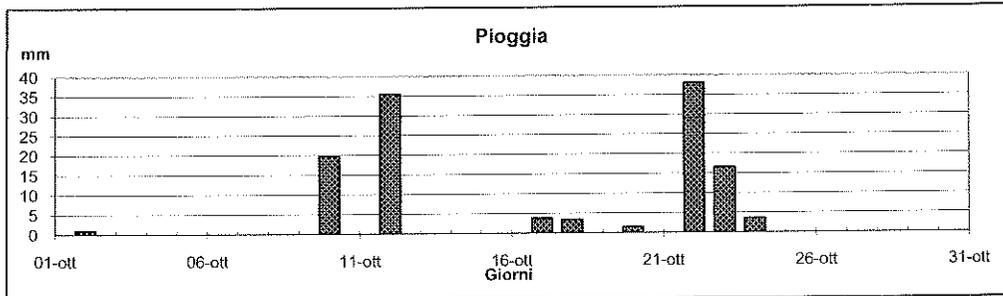
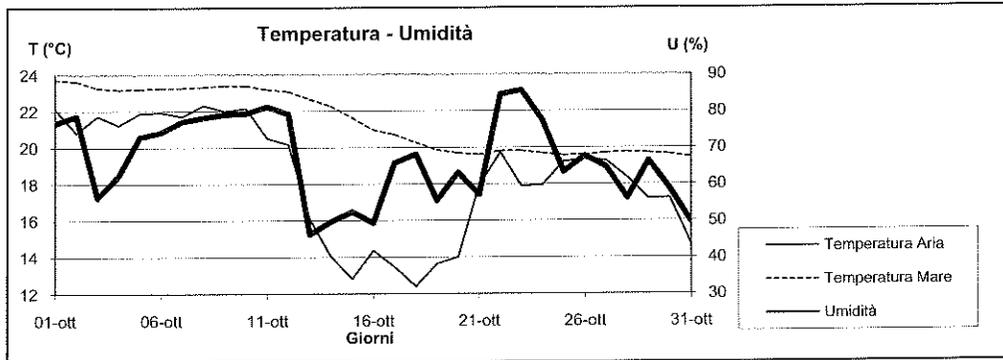
Max: 17 m/s il 23/10 alle ore 4.50

**Radiazione totale**

Max: 949.9 W/m² il 11/10 alle ore 11.0

**Radiazione UVb**

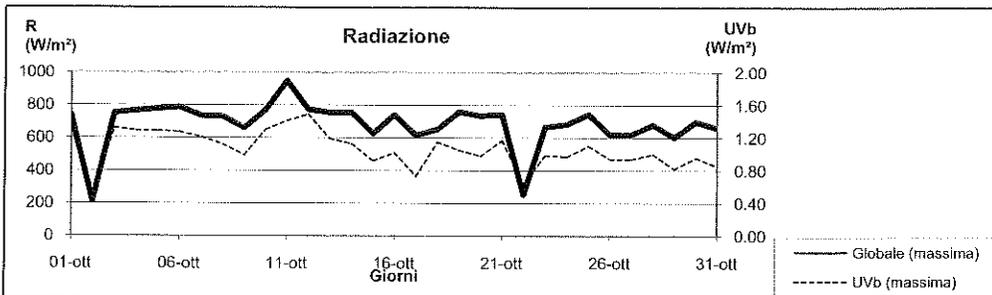
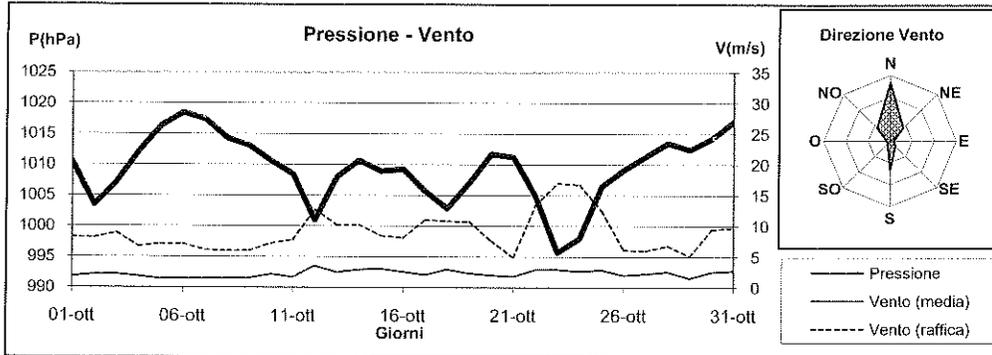
Max: 1.480 W/m² il 12/10 alle ore 12.10



**OTTOBRE 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/10/09	1010.5	180.0	1.8	168.5	0.273	1006.9	1013.2	8.2	739.6	1.320
2/10/09	1003.4	0.0	2.1	36.3	0.102	1001.5	1007.1	8.1	211.7	0.510
3/10/09	1007.2	0.0	2.2	216.0	0.314	1003.9	1011.4	8.9	752.6	1.320
4/10/09	1012.2	0.0	1.8	220.5	0.306	1010.7	1014.4	6.7	766.1	1.290
5/10/09	1016.3	180.0	1.4	209.4	0.293	1014.4	1018.6	7.1	777.5	1.290
6/10/09	1018.5	0.0	1.5	184.0	0.259	1017.4	1019.2	7.1	789.0	1.270
7/10/09	1017.4	315.0	1.5	188.2	0.273	1015.7	1018.6	6.1	736.0	1.210
8/10/09	1014.3	315.0	1.5	158.9	0.224	1012.5	1016.2	6.0	731.3	1.120
9/10/09	1013.1	180.0	1.5	151.3	0.207	1011.9	1013.8	6.0	661.7	0.990
10/10/09	1010.6	180.0	2.1	114.3	0.201	1008.8	1013.0	7.2	772.4	1.300
11/10/09	1008.4	180.0	1.7	135.4	0.214	1007.4	1009.4	7.8	949.9	1.410
12/10/09	1001.0	180.0	3.5	105.5	0.186	994.2	1008.2	12.7	773.6	1.490
13/10/09	1008.0	0.0	2.5	206.8	0.272	1000.3	1012.0	10.2	756.2	1.190
14/10/09	1010.7	45.0	2.9	155.9	0.223	1009.5	1012.0	10.2	757.0	1.130
15/10/09	1009.0	0.0	3.0	55.7	0.099	1007.6	1011.3	8.4	626.9	0.920
16/10/09	1009.3	0.0	2.6	197.5	0.236	1007.7	1010.4	8.1	741.9	1.020
17/10/09	1005.7	0.0	2.1	49.5	0.080	1002.7	1008.9	11.0	615.4	0.730
18/10/09	1002.9	0.0	3.0	69.3	0.132	1001.4	1005.2	10.8	653.8	1.150
19/10/09	1007.0	0.0	2.3	178.7	0.224	1004.6	1009.5	10.7	760.1	1.050
20/10/09	1011.7	315.0	2.0	173.8	0.215	1009.0	1013.8	7.6	736.4	0.980
21/10/09	1011.2	0.0	1.8	175.6	0.245	1008.3	1013.2	4.9	743.9	1.170
22/10/09	1004.9	180.0	2.9	23.4	0.055	1001.1	1008.3	13.4	252.0	0.640
23/10/09	995.7	135.0	2.9	60.2	0.114	992.9	1001.2	17.0	667.2	0.990
24/10/09	998.0	0.0	2.7	89.7	0.136	995.4	1003.5	16.7	683.0	0.970
25/10/09	1006.5	45.0	2.9	129.1	0.172	1003.4	1009.5	12.5	745.1	1.100
26/10/09	1009.1	315.0	2.0	165.3	0.211	1008.2	1010.7	6.1	620.5	0.940
27/10/09	1011.3	0.0	2.2	159.6	0.205	1010.1	1013.6	6.0	622.5	0.940
28/10/09	1013.5	0.0	2.5	169.2	0.212	1012.6	1014.4	6.8	680.6	1.000
29/10/09	1012.4	0.0	1.5	157.5	0.185	1010.5	1013.8	5.1	604.7	0.820
30/10/09	1014.3	45.0	2.5	161.6	0.196	1012.6	1016.8	9.4	698.0	0.960
31/10/09	1017.0	45.0	2.7	171.5	0.185	1016.2	1018.1	9.7	659.3	0.850



**NOVEMBRE 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin(°C)	Tmax(°C)	Umin(%)	Umax(%)	Tmare(°C)
1/11/09	13.8	56.6	0.0	10.8	17.5	41.0	66.4	19.2
2/11/09	15.1	71.4	4.0	11.4	17.2	65.6	86.0	18.9
3/11/09	15.6	67.7	6.2	12.3	17.5	52.6	92.3	18.7
4/11/09	14.8	76.5	3.8	10.8	18.9	65.1	88.2	18.6
5/11/09	18.1	71.7	11.8	16.4	20.0	53.8	90.1	18.6
6/11/09	15.4	83.9	32.2	14.1	18.2	71.3	90.2	18.8
7/11/09	14.7	70.1	0.0	12.0	17.7	50.4	81.1	18.6
8/11/09	14.4	75.8	27.2	11.6	16.1	54.8	92.1	18.4
9/11/09	13.5	79.0	39.2	11.9	15.9	66.2	88.0	17.9
10/11/09	14.1	73.8	0.2	11.5	16.9	60.5	82.8	17.5
11/11/09	13.9	73.1	0.0	12.0	17.5	51.4	84.5	17.6
12/11/09	14.1	74.4	0.0	11.0	17.6	58.9	84.5	17.8
13/11/09	15.2	74.6	0.0	12.7	19.0	60.9	81.8	18.3
14/11/09	15.6	81.5	0.0	12.9	18.5	70.1	85.8	18.2
15/11/09	16.8	82.3	0.0	15.0	18.7	76.7	85.6	18.3
16/11/09	16.7	82.1	0.0	14.2	19.3	69.0	87.9	18.3
17/11/09	17.4	74.8	0.0	14.1	21.7	52.1	88.6	18.2
18/11/09	17.2	76.4	0.0	14.3	20.8	62.0	84.3	18.2
19/11/09	17.1	78.5	0.0	13.9	20.9	61.1	84.9	18.2
20/11/09	17.4	72.2	0.0	14.2	22.4	53.5	79.3	18.1
21/11/09	16.7	75.2	0.0	14.1	21.2	52.3	88.2	
22/11/09	15.7	83.2	0.0	14.5	17.0	76.8	89.5	
23/11/09	16.3	76.9	0.0	14.9	17.8	70.5	81.5	
24/11/09	16.4	77.7	0.0	14.1	18.8	67.9	85.1	
25/11/09	15.5	72.8	0.0	12.5	19.7	55.0	84.9	
26/11/09	15.9	76.5	0.0	13.4	18.0	66.1	85.6	
27/11/09	16.9	79.8	3.2	15.5	18.0	67.0	88.1	
28/11/09	16.2	84.1	14.4	14.4	18.3	65.9	91.2	
29/11/09	16.1	79.9	0.0	12.7	18.9	63.3	87.8	
30/11/09	18.3	75.9	3.2	14.8	19.5	66.9	81.2	

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 10.8 °C il 1/11 alle ore 6.40

Max: 22.4 °C il 20/11 alle ore 11.50

**Umidità**

Min: 41.0 % il 1/11 alle ore 12.10

Max: 92.3 % il 3/11 alle ore 1.40

**Pressione**

Min: 989.9 hPa il 3/11 alle ore 15.10

Max: 1026.5 hPa il 20/11 alle ore 20.50

**Velocità del vento**

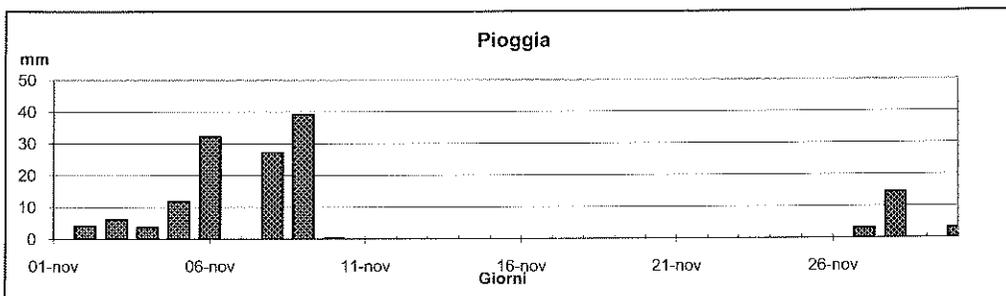
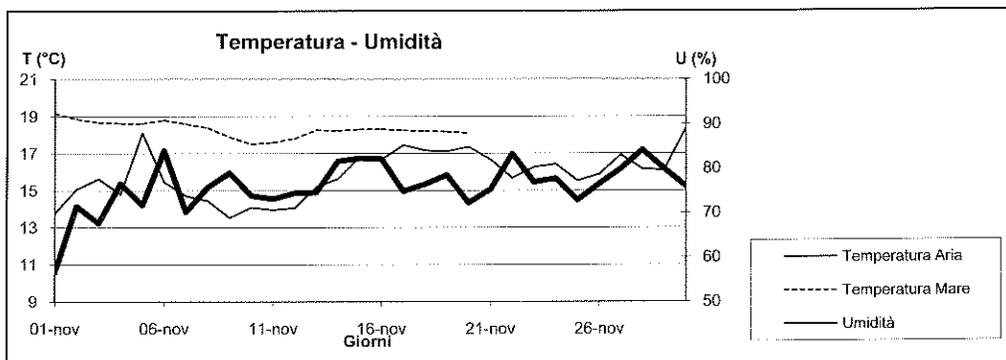
Max: 22.0 m/s il 8/11 alle ore 7.30

**Radiazione totale**

Max: 766.1 W/m<sup>2</sup> il 5/11 alle ore 11.50

**Radiazione UVb**

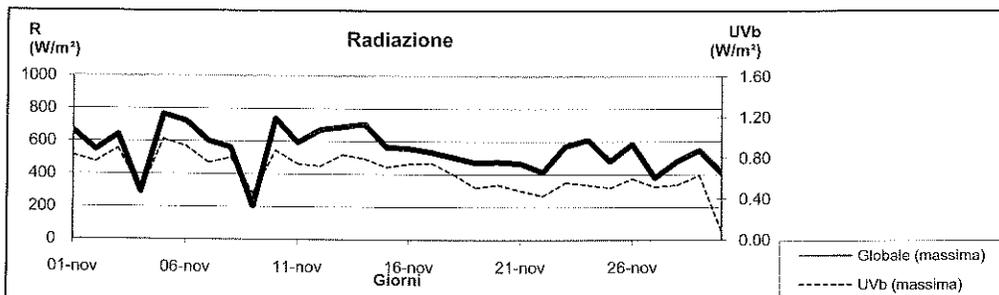
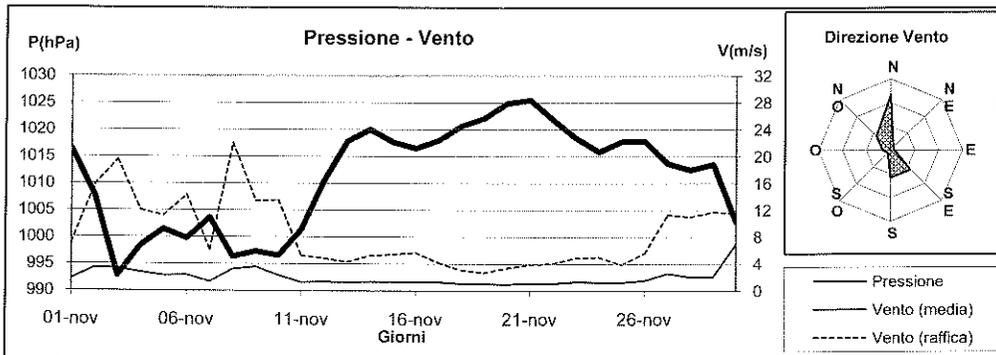
Max: 0.980 W/m<sup>2</sup> il 5/11 alle ore 12.10



**NOVEMBRE 2009**

(medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/11/09	1016.3	315.0	1.8	168.3	0.177	1014.4	1018.0	7.1	663.6	0.820
2/11/09	1007.9	180.0	3.4	65.9	0.101	995.9	1014.4	15.8	548.6	0.760
3/11/09	992.8	315.0	3.3	93.7	0.126	989.9	996.0	19.5	641.5	0.890
4/11/09	998.4	135.0	2.8	31.5	0.059	996.0	1000.3	12.0	293.2	0.470
5/11/09	1001.5	270.0	2.3	153.3	0.187	996.0	1004.5	11.2	766.1	0.980
6/11/09	999.8	135.0	2.3	49.8	0.087	997.8	1002.1	14.3	725.3	0.910
7/11/09	1003.6	315.0	1.4	155.9	0.166	1000.9	1006.2	6.1	603.5	0.750
8/11/09	996.3	135.0	3.2	50.2	0.072	992.4	1000.9	22.0	563.2	0.800
9/11/09	997.3	135.0	3.6	10.5	0.032	996.5	999.0	13.4	203.0	0.450
10/11/09	996.6	135.0	2.3	110.5	0.140	995.4	998.4	13.5	741.1	0.870
11/11/09	1001.4	0.0	1.3	119.5	0.138	998.1	1006.4	5.2	593.7	0.740
12/11/09	1010.6	0.0	1.4	123.7	0.129	1006.4	1015.0	4.8	670.8	0.720
13/11/09	1017.9	0.0	1.3	115.5	0.140	1015.0	1020.5	4.3	688.2	0.830
14/11/09	1020.0	0.0	1.3	89.4	0.123	1018.6	1021.7	5.2	706.0	0.790
15/11/09	1017.7	180.0	1.4	113.5	0.141	1016.8	1018.6	5.4	585.2	0.710
16/11/09	1016.5	0.0	1.3	89.0	0.126	1015.6	1017.4	5.7	558.1	0.740
17/11/09	1018.0	0.0	1.3	132.6	0.154	1016.8	1019.9	4.2	535.5	0.750
18/11/09	1020.7	0.0	1.1	116.2	0.124	1019.8	1021.7	3.1	502.7	0.640
19/11/09	1022.1	0.0	1.1	102.6	0.104	1021.1	1023.5	2.7	472.3	0.510
20/11/09	1024.9	0.0	1.0	102.0	0.101	1023.5	1026.5	3.4	476.6	0.540
21/11/09	1025.5	0.0	1.1	107.0	0.103	1024.1	1026.5	3.9	467.1	0.480
22/11/09	1021.8	0.0	1.1	66.9	0.081	1020.3	1024.6	4.1	413.8	0.430
23/11/09	1018.4	180.0	1.4	68.5	0.075	1017.3	1020.5	4.9	572.7	0.560
24/11/09	1015.9	0.0	1.3	109.3	0.101	1014.4	1017.4	5.0	612.2	0.540
25/11/09	1017.8	0.0	1.2	116.7	0.107	1016.8	1018.7	3.9	481.0	0.510
26/11/09	1017.8	180.0	1.5	95.6	0.104	1016.8	1018.9	5.6	586.5	0.600
27/11/09	1013.7	180.0	2.6	23.5	0.040	1011.7	1016.7	11.3	380.1	0.520
28/11/09	1012.5	315.0	2.0	49.4	0.069	1010.1	1016.2	11.0	480.2	0.540
29/11/09	1013.5	180.0	2.1	86.1	0.104	1008.9	1016.2	11.7	546.2	0.630
30/11/09	1002.9	135.0	7.0	65.1	0.080	999.1	1008.5	11.6	410.6	0.085



**DICEMBRE 2009**

(medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Tmare (°C)
1/12/09	13.0	78.6	15.2	11.3	15.1	63.0	86.0	
2/12/09	12.6	68.3	0.0	9.5	16.3	47.2	80.9	
3/12/09	12.2	66.6	0.0	9.5	15.5	43.8	75.1	17.7
4/12/09	14.0	79.3	22.6	11.1	15.5	70.3	90.5	17.4
5/12/09	13.5	73.5	0.2	10.4	16.5	55.9	87.1	
6/12/09	13.7	75.1	0.0	10.9	16.9	64.2	80.4	
7/12/09	14.2	78.1	0.0	12.2	15.9	65.6	85.6	
8/12/09	15.8	78.1	0.4	14.0	16.9	67.7	84.2	17.5
9/12/09	13.5	65.1	0.0	12.0	15.6	40.8	85.1	17.5
10/12/09	13.2	55.6	0.0	10.9	16.3	44.2	62.8	
11/12/09	11.8	57.7	0.0	9.4	16.2	42.9	65.6	17.3
12/12/09	10.7	59.3	0.0	8.8	13.7	48.7	67.5	17.2
13/12/09	10.5	62.3	2.8	8.5	12.8	46.9	78.0	
14/12/09	12.1	79.4	13.0	9.5	15.8	68.4	87.7	
15/12/09	11.7	64.2	0.6	9.8	12.8	56.7	80.1	16.6
16/12/09	10.4	64.5	2.2	8.7	12.7	49.5	80.3	16.6
17/12/09	10.5	80.0	14.2	8.7	12.4	58.9	90.1	16.4
18/12/09	9.4	63.3	0.4	6.8	11.1	40.3	84.5	16.4
19/12/09	9.7	72.4	10.4	7.9	12.1	54.4	87.0	16.1
20/12/09	7.4	58.6	0.8	4.5	9.9	32.6	77.3	16.0
21/12/09	9.1	61.8	0.2	4.0	14.0	49.9	72.3	16.0
22/12/09	15.3	77.5	1.0	13.5	16.9	68.5	84.9	15.7
23/12/09	17.1	80.0	0.0	16.3	18.6	62.2	86.8	15.5
24/12/09	18.4	70.7	0.4	17.2	20.0	54.1	81.9	15.5
25/12/09	17.4	83.8	2.6	15.6	18.4	77.7	89.0	15.6
26/12/09	15.3	68.0	10.6	13.4	17.6	48.9	92.4	15.7
27/12/09	13.9	79.1	4.2	11.4	16.0	64.1	92.5	15.7
28/12/09	12.8	74.0	0.2	9.8	14.9	64.6	82.2	15.7
29/12/09	14.3	84.6	2.0	13.1	15.6	78.5	91.2	15.8
30/12/09	16.1	87.6	0.2	13.9	17.4	79.1	93.2	15.8
31/12/09	17.0	77.5	0.0	16.0	18.2	70.4	81.7	15.8

**MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI**

**Temperatura**

Min: 4.0 °C il 21/12 alle ore 2.10

Max: 20.0 °C il 24/12 alle ore 1.50

**Umidità**

Min: 32.6 % il 20/12 alle ore 16.10

Max: 93.2 % il 30/12 alle ore 11.30

**Pressione**

Min: 989.3 hPa il 19/12 alle ore 12.50

Max: 1016.7 hPa il 7/12 alle ore 9.40

**Velocità del vento**

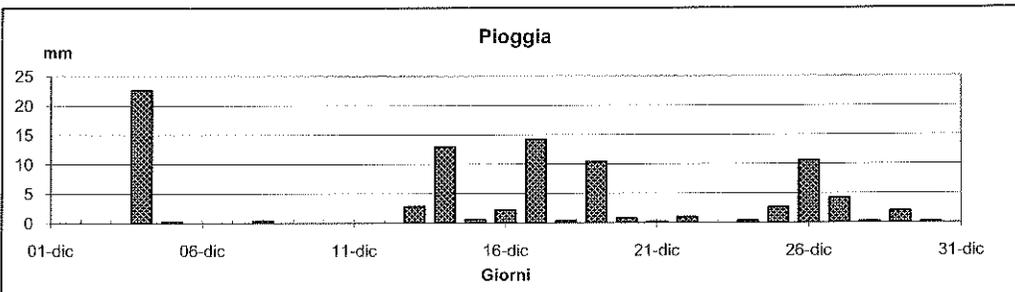
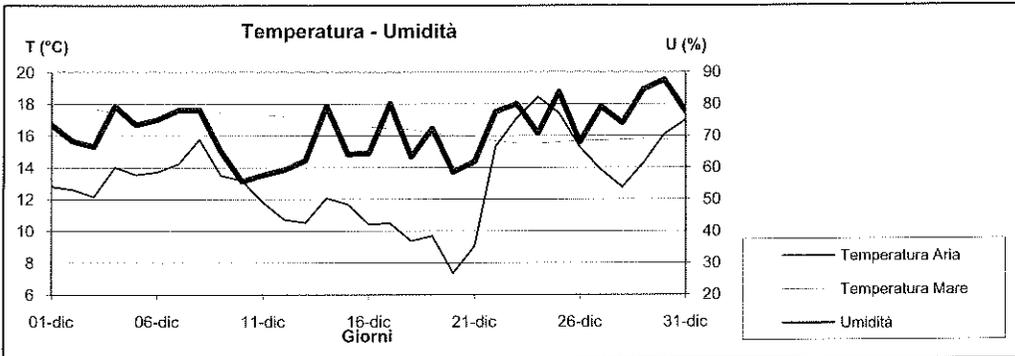
Max: 19.2 m/s il 19/12 alle ore 4.00

**Radiazione totale**

Max: 644.3 W/m² il 12/12 alle ore 11.10

**Radiazione UVb**

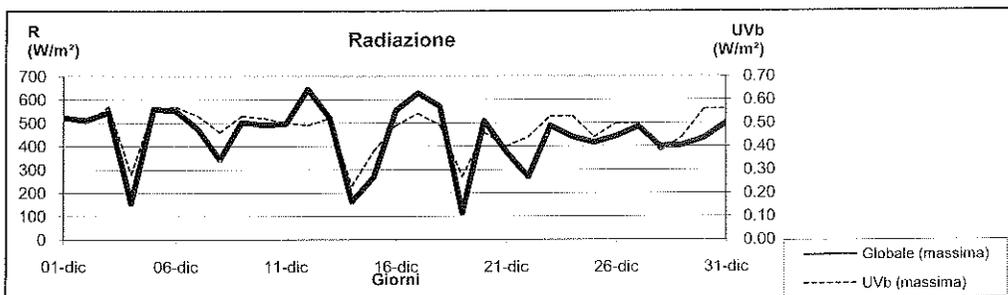
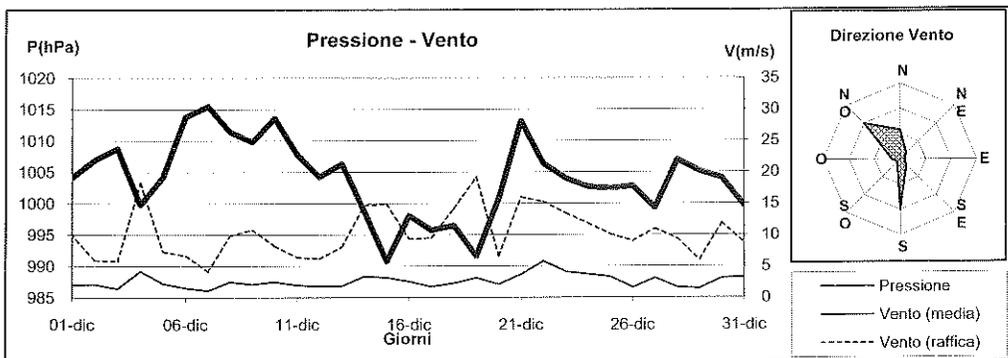
Max: 0.570 W/m² il 3/12 alle ore 11.50



**DICEMBRE 2009**

(medie giornaliere)

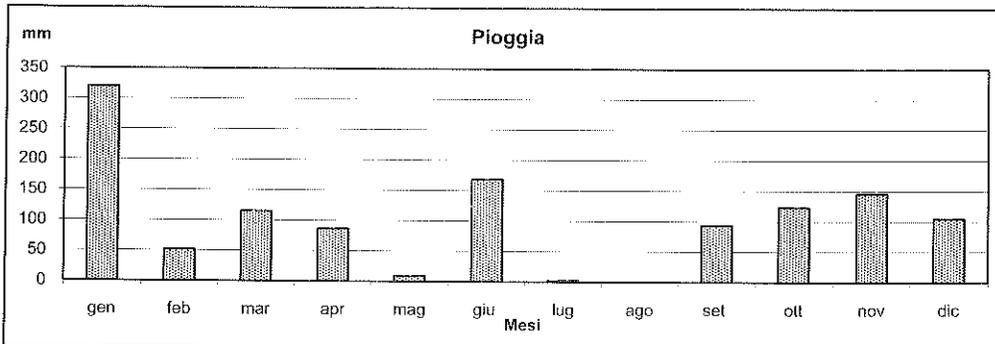
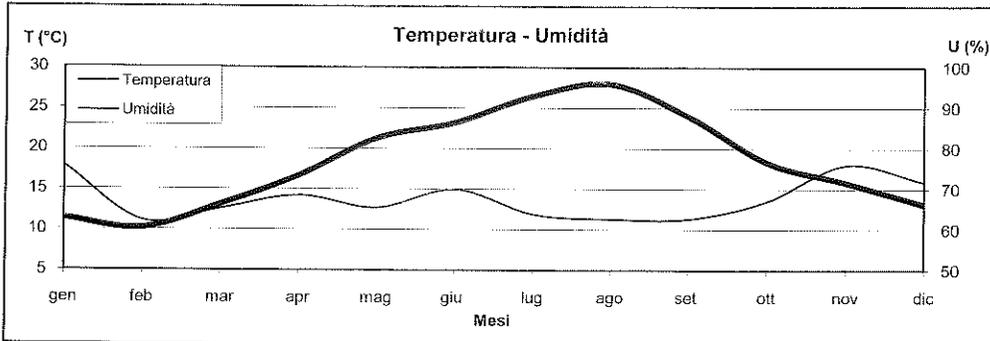
Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m <sup>2</sup> )	UVb(W/m <sup>2</sup> )	P <sub>min</sub> (hPa)	P <sub>max</sub> (hPa)	VV <sub>max</sub> (m/s)	R <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )	UVb <sub>max</sub> (W/m <sup>2</sup> )
1/12/09	1001.3	180.0	2.0	74.5	0.088	998.3	1004.5	13.9	535.1	0.550
2/12/09	1006.9	315.0	2.1	122.7	0.101	1003.9	1009.5	5.9	511.0	0.500
3/12/09	1008.8	0.0	1.4	107.0	0.104	1006.4	1010.1	5.8	546.2	0.570
4/12/09	999.8	135.0	4.2	11.7	0.025	996.6	1006.4	18.3	156.8	0.280
5/12/09	1004.2	315.0	2.2	98.8	0.104	996.3	1012.0	7.3	560.4	0.560
6/12/09	1013.8	315.0	1.5	109.6	0.102	1012.0	1015.0	6.7	552.5	0.570
7/12/09	1015.5	0.0	1.1	80.1	0.093	1015.0	1016.7	4.2	474.3	0.530
8/12/09	1011.5	180.0	2.5	41.8	0.062	1008.3	1015.0	9.9	342.6	0.460
9/12/09	1009.8	315.0	2.1	114.8	0.103	1007.5	1013.8	10.8	503.9	0.530
10/12/09	1013.6	0.0	2.5	113.6	0.104	1012.0	1014.7	8.2	491.3	0.520
11/12/09	1007.9	315.0	2.0	115.8	0.097	1005.1	1012.2	6.4	496.8	0.500
12/12/09	1004.2	0.0	1.8	106.2	0.091	1002.8	1005.8	6.2	644.3	0.490
13/12/09	1006.3	0.0	1.9	55.6	0.066	1004.6	1008.3	8.1	522.5	0.520
14/12/09	998.8	315.0	3.4	20.7	0.035	993.0	1004.7	14.7	163.5	0.230
15/12/09	990.8	45.0	3.2	37.0	0.058	989.4	993.6	14.9	267.9	0.380
16/12/09	998.1	315.0	2.6	73.4	0.070	993.6	1002.1	9.3	553.7	0.490
17/12/09	995.7	270.0	1.7	34.0	0.059	993.6	1001.4	9.5	628.9	0.540
18/12/09	996.5	315.0	2.3	107.5	0.094	992.4	999.7	14.2	570.7	0.490
19/12/09	991.6	315.0	3.1	13.3	0.035	989.3	996.7	19.2	114.4	0.270
20/12/09	1000.7	315.0	2.1	101.2	0.089	994.1	1010.8	6.6	510.2	0.460
21/12/09	1013.1	180.0	3.7	36.1	0.050	1009.8	1016.2	16.0	376.2	0.400
22/12/09	1006.3	180.0	5.8	21.8	0.039	1002.7	1010.0	15.3	269.4	0.440
23/12/09	1004.0	180.0	4.1	100.8	0.100	1001.5	1005.8	13.4	488.1	0.530
24/12/09	1002.7	180.0	3.7	78.7	0.097	1000.3	1004.5	11.8	440.2	0.530
25/12/09	1002.4	180.0	3.3	45.5	0.057	999.8	1005.2	10.1	416.5	0.440
26/12/09	1002.8	0.0	1.6	47.5	0.068	996.0	1007.6	9.0	443.4	0.500
27/12/09	999.3	315.0	3.1	56.7	0.068	994.8	1005.8	11.0	484.5	0.500
28/12/09	1007.0	180.0	1.6	48.1	0.057	1004.5	1008.9	9.4	400.7	0.380
29/12/09	1005.2	180.0	1.4	24.5	0.043	1003.9	1007.0	6.0	405.1	0.440
30/12/09	1004.1	180.0	3.1	60.4	0.080	1002.1	1005.8	11.9	435.5	0.560
31/12/09	999.7	180.0	3.2	100.2	0.107	994.5	1003.9	8.7	500.0	0.560

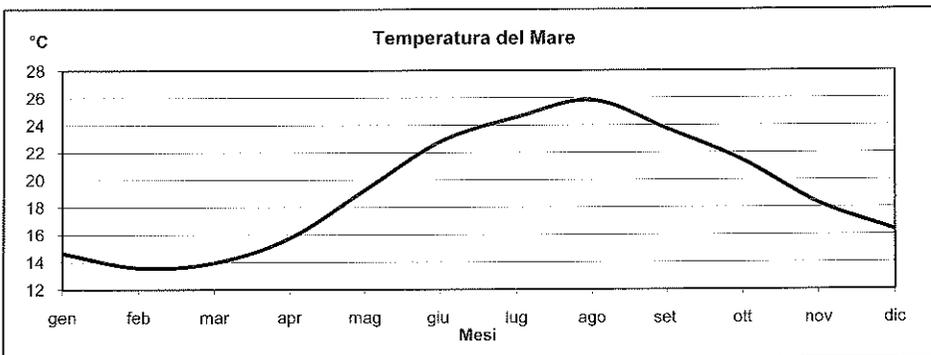
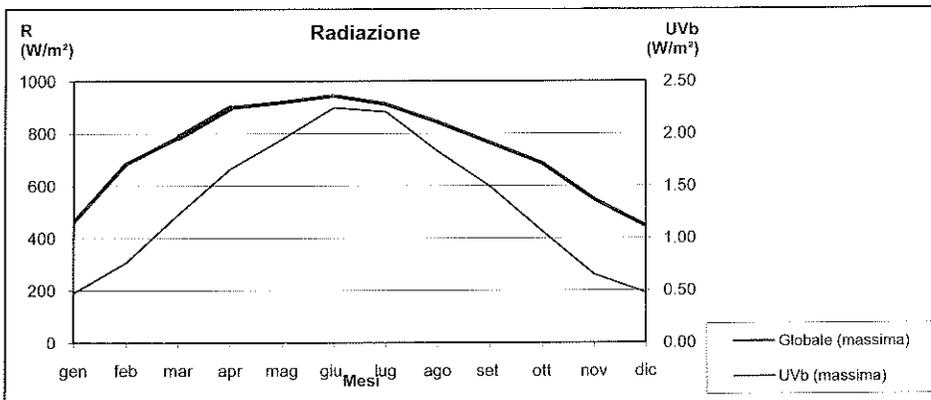
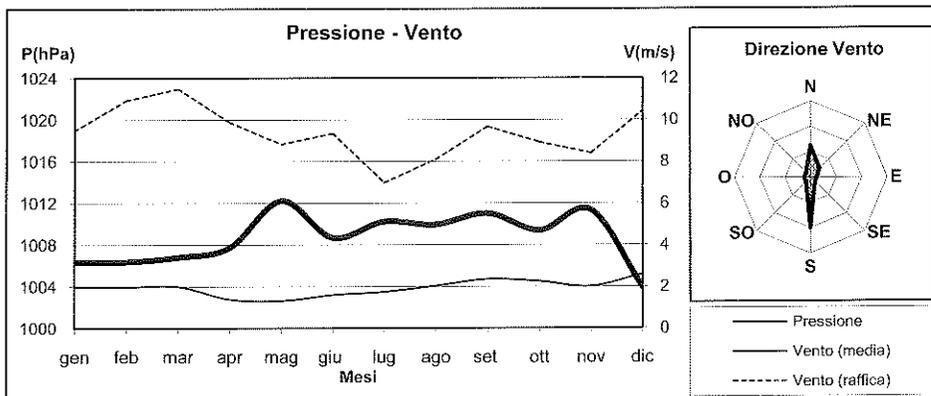


**MEDIE MENSILI 2009**

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Tinare (°C)
Gennaio	11.4	75.8	320.1	1006.3	0.0	2.0	72.9	0.073	14.6
Febbraio	10.2	62.3	51.6	1006.4	45.0	2.0	134.7	0.136	13.6
Marzo	13.1	65.1	115.0	1006.8	180.0	2.0	171.3	0.235	14.0
Aprile	16.6	68.4	86.4	1007.7	180.0	1.4	211.7	0.327	15.8
Maggio	21.3	65.4	9.0	1012.2	180.0	1.3	285.6	0.493	19.3
Giugno	23.2	69.9	168.4	1008.7	180.0	1.6	282.0	0.550	22.8
Luglio	26.4	63.8	2.4	1010.2	180.0	1.7	311.7	0.606	24.6
Agosto	27.9	62.6	0.4	1009.9	180.0	2.0	272.4	0.474	25.8
Settembre	23.9	62.6	93.4	1011.0	0.0	2.4	200.6	0.332	23.7
Ottobre	18.3	67.0	123.0	1009.4	0.0	2.2	143.2	0.202	21.4
Novembre	15.8	75.9	145.4	1011.3	0.0	2.0	92.7	0.110	18.3
Dicembre	13.1	71.8	104.2	1003.9	180.0	2.6	69.7	0.076	16.3
<b>ANNO</b>	<b>18.4</b>	<b>67.6</b>	<b>1219.3</b>	<b>1008.7</b>	<b>180.0</b>	<b>1.9</b>	<b>187.4</b>	<b>0.301</b>	<b>19.2</b>

Data	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
Gennaio	9.3	13.9	63.1	84.0	1003.5	1009.2	9.5	462.9	0.476
Febbraio	7.4	13.2	46.6	74.3	1003.3	1009.8	10.9	684.5	0.765
Marzo	10.3	16.0	47.6	80.8	1003.5	1010.2	11.5	784.7	1.227
Aprile	14.1	19.9	50.5	81.8	1005.4	1010.0	9.9	899.2	1.660
Maggio	18.2	25.1	45.5	80.3	1010.7	1013.8	8.8	919.2	1.945
Giugno	20.4	26.3	53.2	82.5	1007.3	1010.3	9.3	944.5	2.248
Luglio	23.7	29.8	46.0	78.9	1009.0	1011.6	7.0	912.1	2.210
Agosto	25.2	31.1	45.6	77.1	1008.6	1011.3	8.1	843.8	1.830
Settembre	21.1	27.0	47.3	74.5	1009.5	1012.7	9.7	764.4	1.494
Ottobre	15.7	21.4	53.4	78.6	1007.1	1011.9	8.9	686.6	1.067
Novembre	13.3	18.7	61.6	85.7	1008.9	1013.8	8.4	549.0	0.652
Dicembre	10.9	15.4	57.4	82.7	1000.8	1007.5	10.4	445.4	0.475
<b>ANNO</b>	<b>15.8</b>	<b>21.5</b>	<b>51.5</b>	<b>80.1</b>	<b>1006.5</b>	<b>1011.0</b>	<b>9.4</b>	<b>741.4</b>	<b>1.337</b>





Riepilogo mensile delle precipitazioni								
Mese	Pioggia Totale mm.	N. Totale giorni con pioggia	N. giorni con pioggia fino ad 1 mm	N. giorni con pioggia da 1.1 a 10 mm	N. giorni con pioggia da 10.1 a 20 mm	N. giorni con pioggia da 20.1, a 40 mm	N. giorni con pioggia da 40.1 a 60 mm	N. giorni con pioggia maggiore di 60 mm
Gennaio	320.1	20	2	8	3	5	1	1
Febbraio	51.6	11	3	7	0	0	0	0
Marzo	115.0	17	6	8	1	2	0	0
Aprile	86.4	12	3	7	1	1	0	0
Maggio	9.0	4	1	3	0	0	0	0
Giugno	168.4	8	0	4	1	1	2	0
Luglio	2.4	1	0	1	0	0	0	0
Agosto	0.4	1	1	0	0	0	0	0
Settembre	93.4	9	2	3	2	2	0	0
Ottobre	123.0	9	1	4	2	2	0	0
Novembre	145.4	11	1	5	2	3	0	0
Dicembre	104.2	21	10	5	5	1	0	0
<b>Totali</b>	<b>1219.3</b>	<b>124</b>	<b>30</b>	<b>55</b>	<b>17</b>	<b>17</b>	<b>3</b>	<b>1</b>

Riepilogo mensile delle Tmin					Riepilogo mensile delle Tmax				
Mese	N. giorni con Tmin ≤ 15°C	N. giorni con Tmin ≤ 10°C	N. giorni con Tmin ≤ 5°C	N. giorni con Tmin ≤ 0°C	Mese	N. giorni con Tmax > 10°C	N. giorni con Tmax > 20°C	N. giorni con Tmax > 30°C	N. giorni con Tmax > 35°C
Gennaio	17	1	0	0	Gennaio	31	0	0	0
Febbraio	23	9	0	0	Febbraio	23	0	0	0
Marzo	15	0	0	0	Marzo	31	1	0	0
Aprile	0	0	0	0	Aprile	12	9	0	0
Maggio	0	0	0	0	Maggio	31	29	0	0
Giugno	0	0	0	0	Giugno	30	30	4	0
Luglio	0	0	0	0	Luglio	31	31	13	0
Agosto	0	0	0	0	Agosto	22	22	16	0
Settembre	0	0	0	0	Settembre	30	30	0	0
Ottobre	0	0	0	0	Ottobre	31	21	0	0
Novembre	0	0	0	0	Novembre	30	5	0	0
Dicembre	14	2	0	0	Dicembre	30	0	0	0
<b>Totali</b>	<b>69</b>	<b>12</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>Totali</b>	<b>332</b>	<b>178</b>	<b>33</b>	<b>0</b>

## ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI<sup>1</sup>

Il *Rendiconto* pubblica le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Le *Note* dovranno essere presentate su supporto cartaceo, in triplice copia, e su supporto magnetico (floppy disk o Cd-Rom) *esclusivamente in formato PDF*. La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice* al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito. La trasformazione dei file nativi in formato PDF dovrà avvenire preferibilmente utilizzando Adobe Acrobat Distiller™, il file finale dovrà incorporare tutte i font utilizzati nel documento originario.

Le dimensioni della pagina sono così fissate: giustezza (lunghezza del rigo) mm 125, altezza della prima pagina (con esclusione della numerazione di pagina) mm 140, altezza delle pagine successive alla prima (con esclusione della numerazione di pagina) mm 190.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo lo stesso criterio di presentazione nella Sezione Riferimenti bibliografici (*References*). I riferimenti dovranno, in ogni caso, riportare nell'ordine: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine lavoro.

La struttura del dattiloscritto, i caratteri da utilizzare, le loro dimensioni e le spaziature sono indicate negli esempi nelle pagine dell'*Appendice* che seguono.

---

<sup>1</sup> Una copia di queste istruzioni può essere scaricata all'indirizzo <http://www.liguori.it/areaautori/?c=normespeciali>, richieste di ulteriori informazioni possono essere inoltrate a [helpdesk@liguori.it](mailto:helpdesk@liguori.it)

I disegni di formule e grafici, contenuti in un rettangolo ideale del formato massimo di 125x190 mm comprendente la eventuale didascalia, non possono essere accettati se prodotti a mano libera, essi dovranno essere realizzati ad alto contrasto. Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere riprodotte e incorporate nella pagina con una risoluzione minima di 300 dpi (punti per pollice). Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le relative didascalie non devono confondersi col testo. È consentita la presentazione delle fotografie e dei disegni in formato digitale solo nel caso in cui la scansione sia effettuata ad alta risoluzione (min. 300 dpi), in caso contrario si dovranno fornire gli originali che saranno scansionati a cura dell'editore.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori dovesse essere superiore a uno. Ulteriori estratti e/o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto, per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che inoltrerà agli interessati un preventivo di spesa (<http://www.liguori.it/servizi/?c=preprint>).



## *APPENDICE*

### NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

#### **Prima pagina.**

Si lasciano vuoti quattro righe dall'alto.

**Titolo: Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

**La Secca delle Formiche di Vivara  
(canale d'Ischia, Campania)  
Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche**

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11:**

Nota di Vincenzo Rosso<sup>1</sup>, Nicola Verde<sup>2</sup> e Pasquale Bianco<sup>1,\*</sup>

A distanza di 0.5 righe digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con **caratteri TNR 9:**

Presentata dal socio Michele Russo  
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 righe digitare in lingua inglese le Key words con **caratteri TNR 9** come indicato:

*Key words:* stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 righe digitare, come indicato, due riassunti con **caratteri TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

Esempio di prima pagina

**Analisi sismologiche fatte  
nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980**  
Nota di Vincenzo Rosso<sup>1</sup>, Nicola Verde<sup>2</sup> e Pasquale Bianco<sup>1\*</sup>

Presentata dal socio Michele Russo  
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

*Key words*: : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

**Abstract** - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

**Riassunto** - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

## 1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

---

<sup>1,2</sup> Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

\* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

**BIBLIOGRAFICI (REFERENCES).** I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo:**

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome*. Science, 230, 157-163.

Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics*. Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando **TMS 9**.

Es:

**Acknowledgements:** i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a piè pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

---

<sup>†</sup> Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

\* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)